А.П.Мостовской

Лекции по геометрии

Учебное пособие

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73
М 84

Пособие по учебной дисциплине "Геометрия" составлено в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности 050201 Математика с дополнительной специальностью Информатика.

Автор : А.П.Мостовской

Пособие содержит лекции по основному двухлетнему курсу геометрии, прочитанному студентам физико-математического факультета Мурманского государственного педагогического университета.

Введение

Данное пособие содержит материал лекций по основному курсу геометрии, прочитанному студентам физико-математического факультета Мурманского государственного педагогического университета. Лекции по геометрии читаются в первых четырех семестрах и разбиты на части в соответствии с учебным планом - аналитическая геометрия на плоскости, аналитическая геометрия в пространстве, проективная геометрия, дифференциальная геометрия и топология, геометрические построения на плоскости и методы изображений и основания геометрии. При этом, проективная геометрия, после того как число геометрических семестров сократили с пяти до четырех, читается в сокращенном виде в конце второго семестра и в начале третьего.

В каждом семестре геометрии отведено всего 15 лекций. Поэтому, часть материала изложена кратко или вообще не вошла в основной курс геометрии. Так, например, не вошли в данный курс теории инвариантов кривых и поверхностей второго порядка, теория квадратичных форм, недостаточно полно изложены метод Монжа, топология и другие разделы геометрии.

Геометрия - аксиоматическая наука. Поэтому данный курс геометрии есть продолжение школьного курса геометрии, в начале которого (6 класс) были сформулированы аксиомы геометрии на плоскости, а в 9 классе - в пространстве. Системы аксиом геометрии в разных действующих школьных учебниках отличаются друг от друга. Геометрия данного пособия есть продолжение геометрии, построенной на системе аксиом, предложенной в школьном учебнике автора Погорелова А.В. Такой список аксиом также приведен в параграфе 20.3 данного пособия.

В преподавании геометрии, особенно в ее практической части, можно применять математические пакеты. В данном курсе такому применению математических пакетов уделено некоторое внимание, которое можно расценить, как эксперимент применения математических пакетов в основном курсе геометрии. Примеры, рассмотренные в лекциях, написаны для пакета Mathematica 6 или, с незначительными изменениями, могут рассматриваться и в более ранних версиях такой программы. Программа Mathematica выбрана, как лучшая и самая удобная программа на данный момент среди всех существующих программ такого класса. Применение таких программ оправдано там, где требуются большие или повторяющиеся вычисления. Например, при решении задач дифференциальной геометрии, при приведении уравнения кривой или поверхности второго порядка к каноническому виду. При этом, на практических занятиях по геометрии, в частности, дифференциальной геометрии, изменяется качество преподавания, оно становится более наглядным и понятным.

Основная сложность применения математических пакетов в начальных семестрах - это отсутствие часов для подготовки студентов к начальной работе с математическими пакетами. На втором курсе специальности "математика", в первом семестре, читается курс "Информационные технологии в математике", одним из разделов которого являются математические пакеты. Практические занятия по этому курсу можно объединить с практическими занятиями по дифференциальной геометрии, которая также изучается в этом семестре.

Для рассмотрения, приведенных в пособии примеров, в программе Mathematica, достаточно знать, что строчки текста, начинающиеся со служебного слова In[i]:= , являются командами пакета Mathematica, где i - номер команды. Такие команды (без служебного слова) следует вводить в рабочем поле программы Mathematica в порядке их нумерации. Для выполнения команды нужно поместить курсор в ячейку (часть рабочего поля, ограниченная синей скобкой справа), содержащую команду и нажать клавиши Shift+Enter (или только клавишу - правый Enter). Результат действия i-ой команды программа Mathematica выделяет в тексте служебным словом Out[i]= .

Часть I
Аналитическая геометрия на плоскости

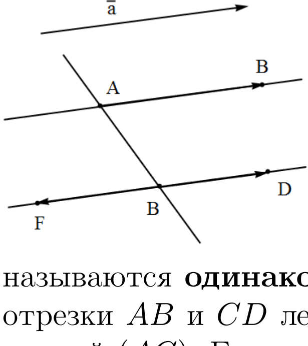
1 Векторная алгебра

Векторное исчисление приняло современный вид в конце XIX века, главным образом, в связи с потребностями механики и физики. Векторы оказались удобным инструментом при изучении геометрических фигур, например, прямых и плоскостей в аналитической геометрии. Один из способов введения векторов рассмотрен в школьном учебнике геометрии автора А.В.Погорелова - векторам предшествовало введение системы координат, координат точек, параллельного переноса. Другой способ введения векторов, который и будет здесь рассмотрен, не связан с какой-либо системой координат. Такой подход к векторам рассмотрен в школьном учебнике геометрии для классов с углубленным изучением геометрии авторов А.Д.Александрова, А.Л.Вернера, В.И.Рыжика, в школьном учебнике геометрии авторов Л.С.Атанасяна, В.Ф.Бутузова и др. Понятие вектора может быть введено аксиоматически (см. тему "Векторные пространства" в курсе алгебры для вузов).

1.1 Векторы. Равенство векторов

Будем придерживаться следующих обозначений: $[AB)$ - луч с вершиной в точке A, проходящий через точку B, $[AB]$ - замкнутый отрезок, концы A, B принадлежат отрезку, AB - открытый отрезок (концы не принадлежат отрезку) и длина отрезка с концами в точках A, B. Через (AB) будем обозначать прямую, проходящую через точки A, B. Если точка C принадлежит отрезку AB (лежит между точками A и B), то будем писать $A - C - B$.

Вектором называется пара перенумерованных точек. Если в паре точек A, B выберем в качестве первой (начальной) точку A, то у нас получился вектор, который будем обозначать символом $\overline{AB}$. Если же выберем в качестве первой точку B, то получим вектор $\overline{BA}$. Вектор, у которого начало A и конец B совпадают, называется **нулевым вектором** и обозначается $\overline{0}$ или $\overline{AA}, \overline{BB}$.... На чертеже вектор, у которого концы не совпадают, обозначается стрелкой с началом в первой точке и концом во второй точке вектора. Поэтому такие векторы иногда называют направленными отрезками.



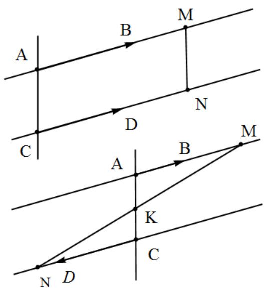
Вектор можно обозначать символами, например, $\overline{a}, \overline{b}$. **Длиной** или **модулем** вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB, длина нулевого вектора равна нулю. Обозначение длины: $|\overline{AB}|$, $|\overline{a}|$. Векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ называют **параллельными** или **коллинеарными** (и пишут $\overline{AB}||\overline{CD}$), если прямые (AB) и (CD) параллельны (здесь и всюду далее, совпадающие прямые будем считать параллельными). Параллельные векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ называются **одинаково** направленными (**противоположно** направленными), если отрезки AB и CD лежат в содержащей их плоскости по одну (разные) стороны от прямой (AC). Если же точки A, B, C, D лежат на одной прямой, то векторы $\overline{AB}$ и

$\overline{CD}$ считаем **одинаково (противоположно) направленными**, если один (ни один) из лучей $[AB)$, $[CD)$ содержит (не содержит) другой. Обозначения: $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ - для одинаково направленных и $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ - для противоположно направленных векторов. Одинаково направленные векторы еще называют **сонаправленными** векторами. На рисунке $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$, $\overline{FC} \uparrow\uparrow \overline{CD}$, $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CF}$, $\overline{CF} \uparrow\downarrow \overline{CD}$. Отметим, что нулевой вектор считается сонаправленным любому вектору.

Следующая лемма необходима для доказательства свойств сонаправленности векторов.

Лемма 1.1 *Вектора $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ параллельны, точка M лежит на луче $[AB)$, точка N-на луче $[CD)$, причем $AM = CN$. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ сонаправлены тогда и только тогда, когда расстояние MN ограничено для всех* **таких** *точек M, N.*

■ Утверждение леммы - наглядно очевидно. Рассмотрим только случай, когда точки A, B, C, D не лежат на одной прямой.



1). Пусть $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$. Тогда точки M и N лежат по одну сторону от прямой (AC) в плоскости, содержащей отрезки AB, CD. Поэтому отрезок MN не пересекает прямую (AC), а, значит, и отрезок AC. Следовательно, $AMNC$ - четырехугольник, а, так как $AM = CN, AM||CN$, то $AMNC$ - параллелограмм для всех точек M, N таких, что $AM = CN$. Тогда $MN < \infty$ (точнее, равно AC) для всех таких точек M, N.

2). Пусть расстояние MN ограничено некоторой константой $Q : MN < Q$ для всех точек M, N на лучах $[AB)$, $[CD)$ соответственно, таких, что $AM = CN$. Тогда $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$. Действительно, допустим противное: $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$, то есть отрезки AB и CD лежат по разные стороны от прямой (AC). Поэтому отрезок MN и прямая (AC) имеют общую точку K. При этом $MN = MK + KN \geqslant AM - AK + NC - KC = AM + NC - AC = 2AM - AC$. Если возьмем $AM = NC > \frac{1}{2}(AC + Q)$, то отсюда получим $MN > Q$, что противоречит условию $MN < Q$. Поэтому $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ и лемма в этом случае доказана. ■

Лемма 1.2 *Отношение сонаправленности векторов обладает следующими свойствами:*

а) $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}$, б) $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b} \to \bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}$, с) $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}, \bar{b} \uparrow\uparrow \bar{c} \to \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{c}$.

В с) предполагается, что вектор $\bar{b}$ не нулевой.

При этом говорят, что сонаправленность векторов есть отношение эквивалентности, то есть, это отношение рефлексивно - а), симметрично - б), транзитивно - в).

■ Вектор $\overline{AB}$ сонаправлен сам себе, так как луч $[AB)$ содержит луч $[AB)$. Если $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$, то лучи $[AB)$, $[CD)$ лежат по одну сторону от прямой (AC) в плоскости, содержащей эти лучи. Это означает, что и $\overline{CD} \uparrow\uparrow \overline{AB}$. Докажем транзитивность. Пусть $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$, и $\overline{CD} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$. Покажем, что $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$. Пусть L, M, N точки на лучах $[AB)$, $[CD)$ и $[PQ)$ соответственно, такие, что $AL = CM = PN$. Так как $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$, то, по лемме 2.1, расстояние LM ограничено, скажем, константой C_1 для всех таких точек L, M. Аналогично, из $\overline{CD} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$ следует, что $MN < C_2$ для всех таких точек M, N. Отсюда $LN \leqslant LM + MN < C_1 + C_2$ и поэтому ограничено для всех точек L, N таких, что $AL = PN$. По лемме 2.1, $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$. ■

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **равными**, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину[1]. Обозначение равенства векторов: $\overline{a} = \overline{b}, \overline{AB} = \overline{CD}$.

Из леммы 2.2 сразу получаем следующие свойства равенства векторов:

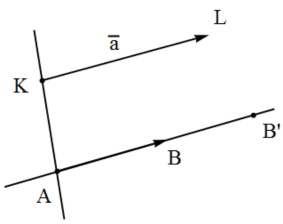
а) $\overline{a} = \overline{a}$, б) $\overline{a} = \overline{b} \to \overline{b} = \overline{a}$, с) $\overline{a} = \overline{b},\ \overline{b} = \overline{c} \to \overline{a} = \overline{c}$.

Другими словами, отношение равенства на множестве всех векторов есть отношение эквивалентности.

Отметим, что все нулевые векторы равны между собой: $\overline{AA} = \overline{0}$.

Откладывание вектора от данной точки. Для любого вектора $\overline{a}$ и любой точки A существует единственная точка B такая, что $\overline{AB} = \overline{a}$.

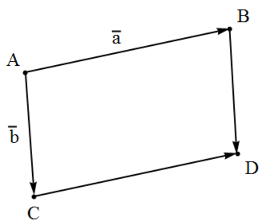
■ Действительно, пусть K, L - начало и конец вектора $\overline{a} : \overline{KL} = \overline{a}$. В плоскости, проходящей через точки K, L, A, рассмотрим луч $[AB')||KL$ и лежащий по одну сторону с лучом $[KL)$ относительно прямой (AK). Если K, L, A лежат на одной прямой, то луч $[AB')$ выбираем так, чтобы один из лучей $[KL), [AB')$ содержал бы другой. Луч $[AB')$ однозначно определяется вектором $\overline{a}$. Отложим на луче $[AB')$ от его начала отрезок AB: $AB = |\overline{a}|$. Тогда $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{a}$ и $|\overline{AB}| = |\overline{a}|$, следовательно, $\overline{AB} = \overline{a}$. ■



Построение вектора $\overline{AB}$, равного $\overline{a}$, называется **откладыванием вектора $\overline{a}$ от точки A**.

Лемма 1.3 *Из равенства $\overline{AB} = \overline{CD}$ следует, что $\overline{AC} = \overline{BD}$.*

■ Рассмотрим только случай, когда точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Пусть $\overline{AB} = \overline{CD}$, покажем, что $\overline{AC} = \overline{BD}$. Отрезки $[AB]$, $[CD]$ лежат по одну сторону от прямой (AC) в плоскости, содержащей точки A, B, C, D. Значит отрезок $[BD]$ не пересекает отрезок $[AC]$ и $ABDC$ - четырехугольник, а так как $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $ABDC$ - параллелограмм. Поэтому $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ и $\overline{AC}||\overline{BD}$. Если бы точки D и C лежали по разные стороны от прямой (AB), то прямая (CD) пересекала бы (AB), что невозможно. Значит $\overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{BD}$ и поэтому $\overline{AC} = \overline{BD}$.■



Угол между векторами. Пусть $\overline{a}, \overline{b}$ - ненулевые векторы, A - произвольная точка. Отложим от точки A векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$. Угол $\angle BAC$ называется **углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$** и обозначается $\angle(\overline{a}, \overline{b})$. Угол между векторами находится в пределах от 0 до π.

Угол между векторами не зависит от выбора вспомогательной точки A. Докажем это. ■ Допустим, что точки A_1, B_1, C_1 такие, что $\overline{a} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{b} = \overline{A_1C_1}$. Из $\overline{a} = \overline{AB}, \overline{a} = \overline{A_1B_1}$ и леммы 2.3 следует, что $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$. Из $\overline{b} = \overline{AC}, \overline{b} = \overline{A_1C_1}$ следует, что $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$. Поэтому $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$, а из леммы 2.3: $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$. Отсюда $|\overline{BC}| = |\overline{B_1C_1}|$ и треугольники $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам. Поэтому $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. ■

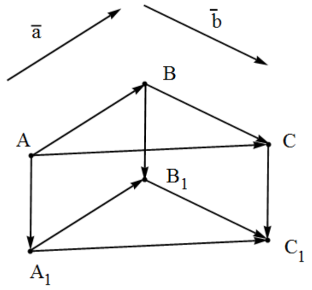
1.2 Операции над векторами

Сложение векторов. Определим сумму векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Возьмем произвольную точку A и отложим от нее вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, от точки B отложим вектор $\overline{b} = \overline{BC}$.

[1]Отметим, что приведенное определение равенства векторов не есть равенство в теоретико-множественном смысле.

Вектор $\overline{AC}$ называется **суммой** векторов $\overline{a}, \overline{b}$. Определение суммы векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не зависит от выбора вспомогательной точки A.

■ Действительно, пусть A_1 другая точка, $\overline{A_1C_1}$ сумма векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построенная с помощью точки A_1. Покажем, что $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$. Так как $\overline{AB} = \overline{a}, \overline{A_1B_1} = \overline{a}$, то по свойству транзитивности равенства векторов $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, а из леммы 2.3 следует, что $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$. Аналогично, из равенств $\overline{BC} = \overline{b}$, $\overline{B_1C_1} = \overline{b}$ следует равенство $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$. Отсюда получаем $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$, а из леммы 2.3 $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$. ■

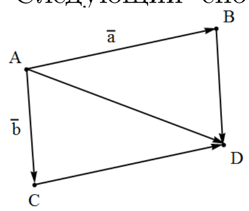


Сумма векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается $\overline{a}+\overline{b}$. Иногда это определение суммы векторов называют **правилом треугольника**.

Их определения суммы векторов вытекает следующее полезное соотношение: для любых трех точек A, B, C:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Следующий способ построения суммы векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется **правилом параллелограмма**: от произвольной точки A отложим векторы $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AC}$ и треугольник $\triangle ABC$ достроим до параллелограмма $ABDC$. Тогда $\overline{AD} = \overline{a} + \overline{b}$.



■ Действительно, $\overline{BD} = \overline{AC} = \overline{b}$, поэтому $\overline{AD} = \overline{AB}+\overline{BD} = \overline{a}+\overline{b}$. ■

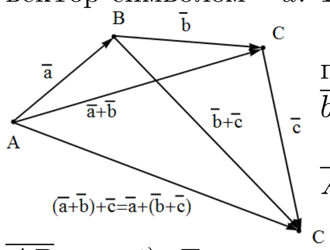
Свойства сложения векторов. Для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ выполняются следующие свойства:

1). $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

2). $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.

3). $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$.

4). Для любого вектора $\overline{a}$ существует единственный вектор $\overline{b}$ такой, что $\overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$. Вектор $\overline{b}$ называется **противоположным вектором** вектору $\overline{a}$. Обозначим этот вектор символом $-\overline{a}$. Таким образом, $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$.



■ Докажем эти свойства. 1). Пусть $\overline{a} = \overline{AB}, \overline{b} = \overline{AC}$, $ABDC$-параллелограмм. Тогда $\overline{AB}+\overline{BD} = \overline{AD} = \overline{AC}+\overline{CD}$ или $\overline{a}+\overline{b} = \overline{b}+\overline{a}$.

2). В обозначениях рисунка: $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = (\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CD} = \overline{AC}+\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{AB}+\overline{BD} = \overline{AB}+(\overline{BC}+\overline{CD}) = \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$.

3). Пусть $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{0} = \overline{BB}$. Тогда $\overline{a} + \overline{0} = \overline{AB} + \overline{BB} = \overline{AB} = \overline{a}$. 4). Для вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ обозначим через $\overline{b} = \overline{BA}$. Тогда $\overline{a} + \overline{b} = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \overline{0}$. Таким образом, $\overline{b} = -\overline{a}$.

Допустим, что кроме вектора $\overline{b}$ существует еще один вектор $\overline{b}_1$, такой, что $\overline{a}+\overline{b}_1 = \overline{0}$. Тогда $\overline{b}_1 = \overline{0}+\overline{b}_1 = (\overline{a}+\overline{b})+\overline{b}_1 = \overline{a}+(\overline{b}+\overline{b}_1) = \overline{a}+(\overline{b}_1+\overline{b}) = (\overline{a}+\overline{b}_1)+\overline{b} = \overline{0}+\overline{b} = \overline{b}$, что и доказывает единственность противоположного вектора. ■

Говоря языком алгебры, множество всех векторов плоскости (или пространства) относительно операции сложения векторов образует **коммутативную группу**.

Следствия. 1). Если $\overline{a} = \overline{AB}$, то $-\overline{a} = \overline{BA}$. Отсюда $-(-\overline{a}) = \overline{a}$.

2). Свойство 2) сложения векторов позволяет определить сумму трех и более векторов следующим способом: $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$, $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} = \overline{a} + (\overline{b} + (\overline{c} + \overline{d}))$....

В частности, если $A_1, A_2, ..., A_n$ произвольные точки, то

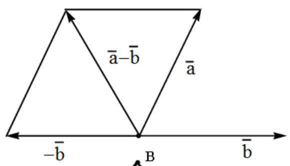
$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}.$$

Это равенство называют правилом многоугольника сложения таких векторов.
Задача 1. Доказать следующие свойства:

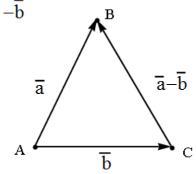
1). $\overline{a} \uparrow\downarrow -\overline{a}$.
2). $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b} \to \overline{a} \uparrow\uparrow (-\overline{b})$.
3). $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}, \overline{b} \uparrow\downarrow \overline{c} \to \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{c}$.
4). $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}, \overline{b} \uparrow\downarrow \overline{c} \to \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{c}$.
5). $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}, \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{c} \to \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b} + \overline{c}$.
6). $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}, \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{c} \to \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b} + \overline{c}$.
7). $|\overline{a} + \overline{b}| = |\overline{a}| + |\overline{b}|$, если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$.
8). $|\overline{a} + \overline{b}| = ||\overline{a}| - |\overline{b}||$, если $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

■ Пусть $\overline{a} = \overline{AB}$, тогда $-\overline{a} = \overline{BA}$. Лучи $[AB)$ и $[BA)$ не содержат друг друга, поэтому $\overline{a} \uparrow\downarrow -\overline{a}$ и 1) доказано. Докажем 2). Пусть $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$, $-\overline{b} = \overline{AD}$. Так как $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, то лучи $[AB)$ и $[AC)$ дополнительные. Так как $\overline{b} \uparrow\downarrow -\overline{b}$, то лучи $[AC)$ и $[AD)$ дополнительные. Следовательно, $[AB) = [AD)$, поэтому $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{AD}$ или $\overline{a} \uparrow\uparrow -\overline{b}$. Если бы в 3) было бы $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{c}$, то вместе с $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ из леммы 2.2 получили бы $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{c}$, что не так. Значит $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{c}$. Докажем 4). Применяя 2) и лемму 2.2: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}, \overline{b} \uparrow\downarrow \overline{c} \to \overline{a} \uparrow\uparrow -\overline{b}, -\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{c} \to \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{c}$. Докажем 5). Пусть точки $C, D \in [AB)$ такие, что $A - C - D$, $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{c}$, $\overline{CD} = \overline{b}$. Так как лучи $[AD)$ и $[AB)$ совпадают, то $\overline{AD} \uparrow\uparrow \overline{AB}$. Поэтому $\overline{b} + \overline{c} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD} \uparrow\uparrow \overline{AB} = \overline{a}$. Задача 6) вытекает из задач 1) 4) и 5). Докажем 7), равенство 8) доказывается аналогично. Если один из векторов равен нулю, то соотношение 7) выполняется. Пусть данные векторы - не нулевые. Пусть точки A, C и $B \in [AC)$ такие, что $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$. По аксиоме длины отрезка $AB + BC = AC$, поэтому $|\overline{a} + \overline{b}| = |\overline{AB} + \overline{BC}| = |\overline{AC}| = AC = AB + BC = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{a}| + |\overline{b}|$. ■

Разность векторов. **Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$** называется вектор, обозначаемый символом $\overline{a} - \overline{b}$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ равен вектору $\overline{a}$. То есть, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$ разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то $\overline{b} + \overline{p} = \overline{a}$. Прибавим к обеим частям последнего равенства вектор $-\overline{b}$, получим $\overline{p} = \overline{a} + (-\overline{b})$. Откуда следует единственность разности и способ ее построения - разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ есть сумма $\overline{a}$ и $-\overline{b}$:



$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b}). \qquad (1)$$



Разность можно построить другим способом: отложим от некоторой точки A векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$. Тогда $\overline{CB}$ - разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. ■ Действительно, по правилу треугольника $\overline{b} + \overline{CB} = \overline{a}$, значит $\overline{CB} = \overline{a} - \overline{b}$ по определению разности. ■

Из определения разности следует, что для любых точек A, B, C:

$$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}.$$

Равенство (1) позволяет определить разность трех и более векторов, например, $\overline{a} - \overline{b} - \overline{c} = \overline{a} + (-\overline{b}) + (-\overline{c})....$

Умножение вектора на число. **Произведением вектора $\overline{a}$ и числа α** называется вектор $\overline{p}$ такой, что 1) $|\overline{p}| = |\alpha||\overline{a}|$, 2) $\overline{p} \uparrow\uparrow \overline{a}$, если $\alpha \geqslant 0$ и $\overline{p} \uparrow\downarrow \overline{a}$, если $\alpha < 0$.

Произведение вектора $\overline{a}$ и числа α обозначается $\alpha\overline{a}$.

Из определения произведения следует, что, если $\overline{a} = \alpha\overline{b}$, то $\overline{a}||\overline{b}$.

Лемма 1.4 *Пусть* $\overline{a}||\overline{b},\ \ \overline{b}\neq 0$. *Тогда*

$$\overline{a}=\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\overline{b},\text{ если }\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}\qquad\text{и}\qquad\overline{a}=-\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\overline{b},\text{ если }\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}.$$

Такие выражения вектора $\overline{a}$ через вектор $\overline{b}$ единственны.

■ Пусть $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$. Обозначим $\overline{q}=\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\overline{b}$ и покажем, что $\overline{a}=\overline{q}$. Из определения произведения вектора на число следует, что $\overline{q}\uparrow\uparrow\overline{b}$. Поэтому из $\overline{q}\uparrow\uparrow\overline{b}$ и $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}\to\overline{q}\uparrow\uparrow\overline{a}$. Кроме того $|\overline{q}|=|\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\overline{b}|=|\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}||\overline{b}|=|\overline{a}|$, следовательно, $\overline{q}=\overline{a}$. Аналогично доказывается второе равенство.

Допустим, теперь, что существует два равенства: $\overline{a}=\alpha\overline{b}$ и $\overline{a}=\alpha_1\overline{b}$. Если α и α_1 разных знаков, то $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b},\ \ \overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, что невозможно. Поэтому $\alpha,\ \ \alpha_1$ одного знака. Далее, приравнивая правые части, получим, что $\alpha\overline{b}=\alpha_1\overline{b}$, откуда $|\alpha\overline{b}|=|\alpha_1\overline{b}|$ или $|\alpha||\overline{b}|=|\alpha_1||\overline{b}|$ или $|\alpha|=|\alpha_1|$. Так как модули чисел равны и знаки чисел совпадают, то $\alpha=\alpha_1$. ■

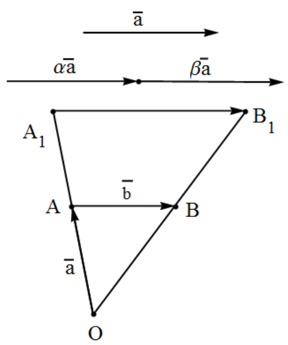
Свойства умножения вектора на число. Для произвольных векторов $\overline{a},\overline{b}$ и произвольных чисел α,β справедливы следующие равенства:

$$1).\ 1\cdot\overline{a}=\overline{a}.\quad 2).\ (-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}.\quad 3).\ \alpha(\beta\overline{a})=(\alpha\beta)\overline{a}.$$
$$4).\ (\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}.\quad 5).\ \alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}.$$

■ Из первых трех свойств докажем второе, остальные доказываются похожим способом.

Пусть $\overline{p}=(-1)\overline{a}$, $\overline{q}=-\overline{a}$. Тогда $|\overline{p}|=|(-1)\overline{a}|=|(-1)||\overline{a}|=|\overline{a}|$, $|\overline{q}|=|-\overline{a}|=|\overline{a}|$. Поэтому $|\overline{p}|=|\overline{q}|$. Из определения произведения вектора на число: $\overline{p}\uparrow\downarrow\overline{a}$. Отсюда и из задачи 1: $\overline{p}\uparrow\uparrow-\overline{a},-\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{a}\to\overline{p}\uparrow\downarrow\overline{a}$, из $\overline{q}\uparrow\downarrow\overline{a},\overline{p}\uparrow\downarrow\overline{a}\to\overline{p}\uparrow\uparrow\overline{q}$. Следовательно $\overline{p}=\overline{q}$.

Докажем 4). Заметим, что равенство 4) верно, если $\alpha=0$ или $\beta=0$ или $\overline{a}=\overline{0}$. Будем считать, что $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ и $\overline{a}\neq\overline{0}$. Рассмотрим случай, когда α и β одного знака. Пусть $\overline{p}=(\alpha+\beta)\overline{a},\overline{q}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$. Тогда $|\overline{p}|=|\alpha+\beta||\overline{a}|=(|\alpha|+|\beta|)|\overline{a}|$ и $\overline{p}\uparrow\uparrow\overline{a}$, если $\alpha>0,\beta>0$ и $\overline{p}\uparrow\downarrow\overline{a}$, если $\alpha<0,\beta<0$. Так как $\alpha\overline{a}\uparrow\uparrow\beta\overline{a}$, то из задачи 1 следует, что $|\overline{q}|=|\alpha||\overline{a}|+|\beta||\overline{a}|=(|\alpha|+|\beta|)|\overline{a}|$. Если $\alpha>0,\beta>0$, то $\overline{a}\uparrow\uparrow\alpha\overline{a},\overline{a}\uparrow\uparrow\beta\overline{a}$ и $\overline{a}\uparrow\uparrow\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$. Если $\alpha<0,\beta<0$, то $\overline{a}\uparrow\downarrow\alpha\overline{a},\overline{a}\uparrow\downarrow\beta\overline{a}$ и $\overline{a}\uparrow\downarrow\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$. Поэтому, если $\alpha>0,\beta>0$, то из $\overline{p}\uparrow\uparrow\overline{a},\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{q}\to\overline{p}\uparrow\uparrow\overline{q}$, а если $\alpha<0,\beta<0$, то из $\overline{p}\uparrow\downarrow\overline{a}$, $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{q}\to\overline{p}\uparrow\uparrow\overline{q}$, а так как $|\overline{p}|=|\overline{q}|$, то $\overline{p}=\overline{q}$.



Пусть теперь числа α и β разного знака. Для определенности, пусть $\alpha<0,\ \beta>0$. Тогда, либо $\alpha+\beta,-\alpha$, либо $\alpha+\beta,-\beta$ имеют одинаковые знаки. Допустим, что $\alpha+\beta,-\alpha$ имеют одинаковые знаки. По доказанному $(\alpha+\beta)\overline{a}+(-\alpha)\overline{a}=((\alpha+\beta)+(-\alpha))\overline{a}=\beta\overline{a}$. Откуда $(\alpha+\beta)\overline{a}=-(-\alpha)\overline{a}+\beta\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$.

Докажем 5). Равенство 5) верно, если один из векторов равен нулю. Считаем, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не нулевые. Допустим, что $\overline{a}||\overline{b}$. Тогда по лемме 2.4 можно записать: $\overline{a}=x\overline{b}$. Отсюда получим: $\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}=\alpha(x\overline{b})+\alpha\overline{b}\overset{3)}{=}(\alpha x)\overline{b}+\alpha\overline{b}=(\alpha x+\alpha)\overline{b}=(\alpha(x+1))\overline{b}\overset{3),4)}{=}\alpha(x\overline{b}+\overline{b})=\alpha(\overline{a}+\overline{b})$.

Пусть теперь $\overline{a}\not\parallel\overline{b}$. Рассмотрим случай, когда $\alpha>0$, случай $\alpha<0$ рассматривается аналогично. Обратимся к рисунку. Пусть $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{OA_1}=\alpha\overline{a}$ и треугольники $\triangle OAB$, $\triangle OA_1B_1$ подобны с коэффициентом подобия $\frac{|\overline{OA_1}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\alpha\overline{a}|}{|\overline{a}|} = \alpha$. Тогда $\overline{A_1B_1} = \frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{AB}|}\overline{b} = \alpha\overline{b}$, $\overline{OB_1} = \frac{|\overline{OB_1}|}{|\overline{OB}|}\overline{OB} = \alpha\overline{OB} = \alpha(\overline{OA} + \overline{AB}) = \alpha(\overline{a} + \overline{b})$. С другой стороны $\overline{OB_1} = \overline{OA_1} + \overline{A_1B_1} = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$. Следовательно, $\alpha\overline{a} + \alpha\overline{b} = \alpha(\overline{a} + \overline{b})$. ■

1.3 Линейная зависимость векторов. Базис векторов плоскости

Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ (1) называются **линейно зависимыми**, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, .. ., \lambda_k$, **не равные нулю одновременно**, такие, что $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_k\overline{a}_k = \overline{0}$ (2). Векторы (1) называются **линейно независимыми**, если для них равенство (2) возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$. Иногда говорят "множество линейно зависимых (независимых) векторов", "система линейно зависимых векторов".

Лемма 1.5 *Два вектора $\overline{a}, \overline{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\overline{a}||\overline{b}$.*

■ 1). Пусть $\overline{a}||\overline{b}$. Если $\overline{b} = \overline{0}$, то имеет место очевидное равенство $0\cdot\overline{a}+1\cdot\overline{b} = 0\cdot\overline{a}+1\cdot\overline{0} = \overline{0}$, что означает линейную зависимость векторов $\overline{a}, \overline{b}$: нашлись два числа $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ не равные нулю одновременно такие, что $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} = \overline{0}$. Если $\overline{b} \neq \overline{0}$, то по лемме 2.4 существует число α такое, что $\overline{a} = \alpha\overline{b}$ или $1 \cdot \overline{a} + (-\alpha) \cdot \overline{b} = \overline{0}$. Следовательно, $\overline{a}, \overline{b}$ - линейно зависимы.

2). Пусть теперь $\overline{a}, \overline{b}$ линейно зависимы: существуют числа λ_1, λ_2 не равные нулю одновременно такие, что $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} = \overline{0}$. Допустим, что $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\overline{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{b}$, а из определения произведения вектора на число следует, что $\overline{a}||\overline{b}$. ■

Задача 1. Доказать, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a_k}$ линейно зависимы, если любая их часть линейно зависима.

■ Допустим, часть этих векторов в количестве n штук линейно зависима, $n \leqslant k$. С точностью до переобозначений, можно считать, что линейно зависимыми будут векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ не равные нулю одновременно такие, что $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+...+\lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$ или $\lambda_1\overline{a}_1+...+\lambda_n\overline{a}_n+0\cdot\overline{a}_{n+1}+...+0\cdot\overline{a}_{k+1} = \overline{0}$. Последнее означает, что $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ линейно зависимые. ■

Задача 2. Доказать, что векторы, один из которых нулевой вектор, линейно зависимы.

Доказательство следует из очевидного равенства $1 \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{a}_1 + ... + 0 \cdot \overline{a_k} = \overline{0}$.

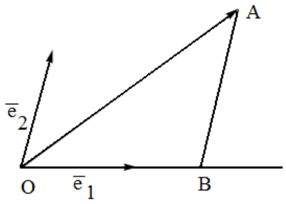
Базисом векторов плоскости называется упорядоченная пара линейно независимых векторов.

Если векторы плоскости $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ линейно независимы и взяты в порядке их записи: $\overline{e}_1$ - первый вектор, $\overline{e}_2$ - второй, то у нас есть базис векторов плоскости, который будем обозначать $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ (или B=$\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$); $\{\overline{e}_2, \overline{e}_1\}$ - другой базис, у которого первый вектор теперь $\overline{e}_2$, второй $\overline{e}_1$. Из леммы 2.5 следует, что векторы базиса не коллинеарны, в частности, базисный вектор не может быть нулевым.

Базис $\{\overline{i}, \overline{j}\}$, векторы которого имеют единичную длину $|\overline{i}| = 1, |\overline{j}| = 1$ и перпендикулярны $\overline{i}\perp\overline{j}$, называется **декартовым** или **ортонормированным** базисом.

Теорема 1.1 *Пусть $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ - базис. Для любого вектора $\overline{a}$ существует единственная упорядоченная пара чисел x, y такая, что $\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2$.*

■ Отложим от некоторой точки O векторы $\overline{a}$, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и проведем через то чку A ($\overline{OA} = \overline{a}$) прямую, параллельную вектору $\overline{e}_2$. Она пересечет прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\overline{e}_1$, в точке B. Тогда $\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BA}$. По лемме 2.4, найдутся числа x, y такие, что $\overline{OB} = x\overline{e}_1, \overline{BA} = y\overline{e}_2$. Следовательно, $\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2$ и существование таких чисел x, y доказано. Допустим, теперь, что существует еще одно такое разложение вектора $\overline{a}$: $\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2$. Приравнивая правые части, получим $x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 = x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2$ или $(x - x_1)\overline{e}_1 + (y - y_1)\overline{e}_2 = \overline{0}$. Так как векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ линейно независимые, то последнее равенство возможно лишь при $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, что и доказывает единственность. ■



Пусть $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ - базис. Числа x, y такие, что $\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2$, называются **координатами вектора $\overline{a}$ в базисе** $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$. Обозначение координат: $\overline{a}(x, y), \overline{a} = (x, y)$.

Существование координат устанавливается теоремой 2.1.

Отметим, что координаты вектора в данном базисе определяются единственным образом: если $\overline{a}(x, y) = \overline{b}(x_1, y_1)$, то $x = x_1, y = y_1$.

Пример. $\overline{e}_1 = (1, 0), \overline{e}_2 = (0, 1)$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ так как верны разложения $\overline{e}_1 = 1\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2$, $\overline{e}_2 = 0\overline{e}_1 + 1\overline{e}_2$. Нулевой вектор имеет координаты $(0, 0)$: $\overline{0} = 0\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2$.

Следствия. 1). Вектор $\overline{a}(x, y)||\overline{e}_1$ тогда и только тогда, когда $y = 0$. Вектор $\overline{a}(x, y)||\overline{e}_2$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

2). Любые три вектора на плоскости линейно зависимы. ■ Возьмем три вектора плоскости $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Если $\overline{a}||\overline{b}$, то из лемме 2.5 и задачи 1 следует, что $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно зависимы. Если $\overline{a}\not\parallel\overline{b}$, то $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ - базис и из теоремы 2.1 следует разложение $\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$ или $(-1)\overline{c} + x\overline{a} + y\overline{b} = \overline{0}$, что означает линейную зависимость этих векторов. ■

Теорема 1.2 *(О координатах линейной комбинации векторов). Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2)$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ и $\overline{p} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$. Тогда*

$$\overline{p} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2).$$

В частности, $\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$, $\alpha\overline{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$.

■ По определению координат, $\overline{p} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = \alpha(x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2) + \beta(x_2\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2)\overline{e}_1 + (\alpha y_1 + \beta y_2)\overline{e}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$.

Отсюда, при $\alpha = 1$, $\beta = \pm 1$ получаем равенства $\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$, а при $\beta = 0$: $\alpha\overline{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$. ■

Пример. 1). $\overline{a} = (-1, 3), \overline{b} = (0, 2)$. Тогда $\overline{a} + \overline{b} = (-1, 5)$, $2\overline{a} = (-2, 6)$.

2). Пусть $\overline{a}_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, $\overline{p} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$. Тогда $\overline{p} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n)$.

Достаточно представить вектор $\overline{p}$ в виде $\overline{p} = ((...(\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2) + \alpha_3\overline{a}_3) + ... + \alpha_n\overline{a}_n)$ и $n - 1$ раз применить теорему 1.2.

Найдем теперь условия коллинеарности векторов в координатах.

Теорема 1.3 *Векторы $\overline{a}(x_1, y_1)$ и $\overline{b}(x_2, y_2)$ параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть существует число λ такое, что $x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2$ или $x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1$ (3).*

■ Пусть $\overline{a}||\overline{b}$. Если $\overline{b} = 0$, то можно записать, что $0 = 0x_1$, $0 = 0y_1$ и считать, что координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пропорциональны с коэффициентом пропорциональности

0. Если $\bar{b} \neq 0$, то лемме 2.4 можно записать, что $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ при некотором λ. Отсюда и из теоремы 2.2 следуют равенства $x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2$.

Пусть теперь выполняется одно из равенств (3), например, первое. Умножим первое равенство (3) на $\bar{e}_1$, второе - на $\bar{e}_2$ и сложим полученные равенства по частям: $x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 = (\lambda x_2)\bar{e}_1 + (\lambda y_2)\bar{e}_2$ или $\bar{a} = \lambda \bar{b}$. Отсюда и из определения произведения вектора на число следует, что $\bar{a}||\bar{b}$. ■

Условия (3) в случае, когда $x_2 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, можно переписать так:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Теорема 1.4 *Векторы $\bar{a}(x_1, y_1)$ и $\bar{b}(x_2, y_2)$ параллельны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат этих векторов равен нулю:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

(см. Приложение).

■ Пусть $\bar{a}||\bar{b}$. Из теоремы 2.3: $x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2$. Поэтому $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 = \lambda x_2 y_2 - x_2 \lambda y_2 = 0$.

Пусть теперь равенство 4) выполнено, то есть, пусть $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$. Если $\bar{b} = \bar{0}$, то $\bar{a}||\bar{b}$ так как нулевой вектор параллелен любому вектору. Считаем, что $\bar{b} \neq \bar{0}$ и положим для определенности, что $y_2 \neq 0$. Пусть $\lambda = \frac{y_1}{y_2}$. Из равенства $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$ получим: $x_1 = \frac{y_1}{y_2}x_2$ или $x_1 = \lambda x_2$. Таким образом, $x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2$. По теореме 2.3: $\bar{a}||\bar{b}$. ■

Пример. Два вектора $\bar{a}(-1, 2)$ и $\bar{b}(2, -4)$ параллельны, так как $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-4) - 2 \cdot 2 = 0$.

1.4 Ориентация плоскости

Рассмотрим два базиса плоскости $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ и $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= c_{11}\bar{e}_1 + c_{12}\bar{e}_2, \\ \bar{e}_2{}' &= c_{21}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

составленная из координат векторов базиса B' в базисе B, называется **матрицей перехода от базиса B к базису B'.** Так как базисные векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ не параллельны, то из теоремы 2.4 следует, что $\det C \neq 0$. Поэтому либо $\det C > 0$, либо $\det C < 0$.

Базисы B и B' называются **одинаково (противоположно) ориентированными**, если определитель матрицы перехода от базиса B к базису B' положителен (отрицателен). Символ $B\omega B'$ означает, что базисы B и B' одинаково ориентированные, а $B\overline{\omega}B'$ - противоположно ориентированы.

Примеры. 1). Базисы $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ и $B' = \{\overline{e}_2, \overline{e}_1\}$ противоположно ориентированы.

■ Обозначим векторы базиса B' через $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2$, тогда $\overline{e}'_1 = \overline{e}_2, \overline{e}'_2 = \overline{e}_1$. Сравнивая с (1), получим: $c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = c_{21} = 1$. Поэтому определитель матрицы перехода от B к B' : $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. ■

2). Базисы $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ и $B' = \{\lambda\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ одинаково ориентированы, если $\lambda > 0$ и противоположно ориентированы, если $\lambda < 0$, так как определитель матрицы перехода от базиса B к базису B' $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda$. В частности, $B\omega B$.

Теорема 1.5 *Отношение ω - одинаковой ориентированности на множестве всех базисов плоскости обладает следующими свойствами: 1). Для любого базиса B: $B\omega B$ (рефлексивность). 2). Если $B\omega B'$, то $B'\omega B$ (симметричность). 3). Если $B\omega B'$ и $B'\omega B''$, то $B\omega B''$ (транзитивность). Другими словами, ω есть отношение эквивалентности на множестве всех базисов плоскости.*

■ Рассмотрим три произвольных базиса плоскости $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ и $B' = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2\}$ и $B'' = \{\overline{e}''_1, \overline{e}''_2\}$. Пусть даны равенства (1) и матрица C перехода от базиса B к базису B' и даны равенства

$$\begin{aligned} \overline{e}''_1 &= b_{11}\overline{e}'_1 + b_{12}\overline{e}'_2, \\ \overline{e}''_2 &= b_{21}\overline{e}'_1 + b_{22}\overline{e}'_2 \end{aligned} \tag{2}$$

и матрица $C_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ перехода от базиса B' к базису B''. Найдем определитель матрицы перехода от базиса B к базису B''. Для этого надо найти координаты векторов $\overline{e}''_1, \overline{e}''_2$ в базисе B: подставим $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2$ из (1) в (2) и, перегруппировав, получим:

$$\begin{aligned} \overline{e}''_1 &= (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21})\overline{e}_1 + (b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22})\overline{e}_2, \\ \overline{e}''_2 &= (b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21})\overline{e}_1 + (b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22})\overline{e}_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда матрица перехода от базиса B к базису B'' будет иметь вид:

$$C_2 = \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим:
$\det C_2 = (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21})(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) - (b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22})\ (b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) = b_{11}b_{21}c_{11}c_{12} + b_{11}b_{22}c_{11}c_{22} + b_{12}b_{21}c_{21}c_{12} + b_{12}b_{22}c_{21}c_{22} -\ b_{11}b_{21}c_{12}c_{11}$- $b_{11}b_{22}c_{12}c_{21} - b_{12}b_{21}c_{22}c_{11} - b_{12}b_{22}c_{22}c_{21} = b_{11}b_{22}(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) + b_{12}b_{21}(c_{21}c_{12} - c_{22}c_{11}) = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = \det C_1 \cdot \det C$.

Таким образом:

$$\det C_2 = \det C \cdot \det C_1. \tag{4}$$

Отсюда следует, что, если B и B', B' и B'' одинаково ориентированы, то есть $\det C > 0, \det C_1 > 0$, то $\det C_2 > 0$ и, следовательно, B и B'' одинаково ориентированы. Тем самым доказана транзитивность отношения ω.

Возьмем теперь вместо базиса B'' базис B: $\overline{e}''_1 = \overline{e}_1, \overline{e}''_2 = \overline{e}_2$. Такими стали равенства (3) в этом случае, матрица $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det C_2 = 1$. Из (4): $\det C \cdot \det C_1 = 1$.

Поэтому, если B и B' одинаково ориентированы, то есть $\det C > 0$, то и $\det C_1 = 1/\det C > 0$ и, следовательно, базисы $B = B''$ и B' одинаково ориентированы. Таким образом, ω - симметрично. Рефлексивность ω следует из примера перед теоремой. ■

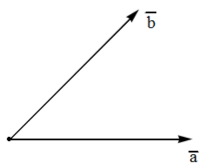
Следствия. 1). Если $B\overline{\omega}B', B'\overline{\omega}B''$, то $B\omega B''$. 2). Если $B\overline{\omega}B', B'\omega B''$, то $B\overline{\omega}B''$. 3). Если $B\omega B', B'\overline{\omega}B''$, то $B\overline{\omega}B''$.

■ Докажем первое свойство. Если $B\overline{\omega}B'$ и $B'\overline{\omega}B''$, то есть $\det C < 0$, $\det C_1 < 0$, то из (4) получим что $\det C_2 > 0$. Следовательно $B\omega B''$. Остальные свойства доказываются аналогично.■

Определение ориентации. Пусть O_1 множество всех базисов одинаково ориентированных с данным базисов B, O_2 - множество всех остальных базисов. Из свойства 1) отношения ω следует, что $B \in O_1$. Базисы из разных множеств противоположно ориентированы: если $B_1 \in O_1$, $B_2 \in O_2$, то есть $B_1\omega B$, $B_2\overline{\omega}B$, то из следствия теоремы 2.5 получим, что $B_1\overline{\omega}B_2$. Отсюда и из свойства 1 отношения ω следует, что множества O_1 и O_2 не пересекаются. Базисы, принадлежащие одному множеству, одинаково ориентированны: если $B_1,\ B_2 \in O_1$, например, то $B_1\omega B$, $B_2\omega B$, а из следствия теоремы 2.5 получим, что $B_1\omega B_2$.

Таким образом, отношение одинаковой ориентированности на множестве всех базисов разбивает это множество на два непересекающихся подмножества O_1, O_2. В алгебре такие множества называются классами эквивалентности. Два базиса принадлежат к одному множеству, если они одинаково ориентированы и к разным, если они ориентированы противоположно.

Ориентацией плоскости называется различие между множествами O_1 и O_2. Установим одно такое различие следующим образом. Нарисуем некоторый базис



$\{\overline{a}, \overline{b}\}$ и назовем одинаково с ним ориентированнные базисы **правыми**, остальные базисы назовем **левыми**. Введение правых базисов означает, что мы установили различие между множествами O_1 и O_2 или ввели ориентацию плоскости. В дальнейшем, говоря о правом базисе, будем иметь ввиду базис одинаково ориентированный с нарисованным, а левый базис будет означать базис противоположно ориентированный с нарисованным.

Можно доказать, что одинаково ориентированные базисы можно перевести один в другой (не выходя из плоскости) непрерывным изменением углов между векторами базисов и длин самих векторов так, что в каждый момент деформации изменяющиеся векторы одного базиса не были бы параллельными.

1.5 Ориентированные углы

Пусть $\angle(\overline{a}, \overline{b})$ - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, определенный в §2.1, угол $\angle(\overline{a}, \overline{b}) \in [0, \pi]$.

Ориентированным (или **направленным**) углом между ненулевыми векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число

$$\measuredangle(\overline{a}, \overline{b}) = \begin{cases} +\angle(\overline{a}, \overline{b}), & \text{если } \{\overline{a}, \overline{b}\} - \text{ правый базис или } \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}; \\ -\angle(\overline{a}, \overline{b}), & \text{если } \{\overline{a}, \overline{b}\} - \text{ левый базис}; \\ \pm\pi, & \text{если } \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}. \end{cases}$$

Ориентированный угол $\measuredangle(\overline{a}, \overline{b}) \in [-\pi, \pi]$. (В школе бы сказали так: α - направленный угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если вектор $\overline{b}$ получается из вектора $\overline{a}$ поворотом вектора

$\overline{a}$ против часовой стрелки на угол α, если $\alpha > 0$ и по часовой стрелки на угол $-\alpha$, если $\alpha < 0$.)

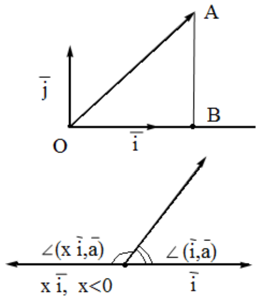
Примеры. Если декартов базис $\{\overline{i},\overline{j}\}$ правый, то $\measuredangle(\overline{i},\overline{j}) = \angle(\overline{i},\overline{j}) = 90^\circ$. Но, $\measuredangle(\overline{j},\overline{i}) = -90^\circ$, так как $\{\overline{j},\overline{i}\}$- левый базис. Аналогично получаем, что $\measuredangle(\overline{i},\overline{-j}) = -90^\circ$.

Теорема 1.6 *Пусть $\overline{a} = (x, y)$ в декартовом базисе $\{\overline{i},\overline{j}\}$, $\alpha = \measuredangle(\overline{i},\overline{a})$- направленный угол между векторами $\overline{i}$ и $\overline{a}$. Тогда*

$$x = |\overline{a}|\cos\alpha, \qquad y = \pm|\overline{a}|\sin\alpha,$$

где выбирается " + ", если базис $\{\overline{i},\overline{j}\}$ правый и " − " в противном случае.

■ Докажем теорему только для правого базиса. Для левого базиса доказательство аналогично.



Отложим от некоторой точки O векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{a}$. По определению координат $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j}$. Пусть точки A, B такие, что $\overline{OB} = x\overline{i}$, $\overline{BA} = y\overline{j}$. Так как треугольник $\triangle OAB$ прямоугольный, то $|\overline{OB}| = |\overline{a}|\cos\angle(\overline{OB},\overline{a}) = |\overline{a}|\cos\angle(x\overline{i},\overline{a})$, $|\overline{BA}| = |\overline{a}|\sin\angle(\overline{OB},\overline{a}) = |\overline{a}|\sin\angle(x\overline{i},\overline{a})$. Из определения произведения вектора на число

$$x = \begin{cases} +|\overline{OB}|, & \text{если } \ \overline{OB} \uparrow\uparrow \overline{i}, \\ -|\overline{OB}|, & \text{если } \ \overline{OB} \uparrow\downarrow \overline{i}. \end{cases} = \begin{cases} +|\overline{a}|\cos\angle(x\overline{i},\overline{a}), & \text{если } \ x > 0; \\ -|\overline{a}|\cos\angle(x\overline{i},\overline{a}), & \text{если } \ x < 0. \end{cases}$$

Если $x > 0$, то $\angle(x\overline{i},\overline{a}) = \angle(\overline{i},\overline{a})$, если $x < 0$, то $\angle(x\overline{i},\overline{a}) = \pi - \angle(\overline{i},\overline{a})$. Отсюда получаем, что $\sin\angle(x\overline{i},\overline{a}) = \sin\angle(\overline{i},\overline{a})$ при любых x, $\cos\angle(x\overline{i},\overline{a}) = \cos\angle(\overline{i},\overline{a})$, если $x > 0$ и $\cos\angle(x\overline{i},\overline{a}) = -\cos\angle(\overline{i},\overline{a})$, если $x < 0$.

Поэтому

$$x = \begin{cases} +|\overline{a}|\cos\angle(\overline{i},\overline{a}) \\ -|\overline{a}|\cos\left(\pi - \angle(\overline{i},\overline{a})\right) \end{cases} = |\overline{a}|\cos\angle(\overline{i},\overline{a}) =$$

$$|\overline{a}|\cos\left(\pm\angle(\overline{i},\overline{a})\right) = |\overline{a}|\cos\alpha,$$

так как косинус - функция четная.

Определитель матрицы перехода от базиса $\{\overline{i},\overline{j}\}$ к базису $\{\overline{i},\overline{a}\}$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} = y$.
Следовательно, $\{\overline{i},\overline{a}\}$- правый (левый) базис тогда и только тогда, когда $y > 0$ ($y < 0$). Учитывая это, запишем

$$y = \begin{cases} +|\overline{BA}|, \text{если } \ \overline{BA} \uparrow\uparrow \overline{j} \text{ или } y > 0 \\ -|\overline{BA}|, \text{если } \ \overline{BA} \uparrow\downarrow \overline{i} \text{ или } y < 0 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} +|\overline{a}|\sin\angle(x\overline{i},\overline{a}), & \text{если } y > 0 \text{ или } \{\overline{i},\overline{a}\} \text{ правый} \\ -|\overline{a}|\sin\angle(x\overline{i},\overline{a}), & \text{если } y < 0 \text{ или } \{\overline{i},\overline{a}\} \text{ левый} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} +|\overline{a}|\sin\angle(\overline{i},\overline{a}), & \text{если } \{\overline{i},\overline{a}\} - \text{ правый} \\ -|\overline{a}|\sin\angle(\overline{i},\overline{a}), & \text{если } \{\overline{i},\overline{a}\} - \text{левый} \end{cases} = \begin{cases} +|\overline{a}|\sin\measuredangle(\overline{i},\overline{a}) \\ -|\overline{a}|\sin\left(-\measuredangle(\overline{i},\overline{a})\right) \end{cases} =$$

$$|\overline{a}|\sin\measuredangle(\overline{i},\overline{a}) = |\overline{a}|\sin\alpha,$$

так как синус - функция нечетная. ■

Следствие. Пусть $\overline{a} = (x, y)$ в декартовом базисе $\{\overline{i}, \overline{j}\}$. Тогда

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

■ Действительно, $x^2 + y^2 = (|\overline{a}|\cos\alpha)^2 + (|\overline{a}|\sin\alpha)^2 = |\overline{a}|^2$. ■

Преимущество направленного угла видно уже из этой теоремы. Если бы $\alpha = \angle(\overline{i}, \overline{a})$, то $y \neq |\overline{a}|\sin\alpha$ для векторов "направленных вниз".

Основные свойства направленных углов получим после введения скалярного произведения векторов.

1.6 Скалярное произведение векторов

Координаты векторов в этом параграфе рассматриваются только в декартовом базисе $\{\overline{i}, \overline{j}\}$.

Скалярным произведением векторов $\overline{a} = (x, y)$ и $\overline{b} = (x_1, y_1)$ называется число $x \cdot x_1 + y \cdot y_1$. Обозначается скалярное произведение так: $\overline{a} \cdot \overline{b}$. Таким образом,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x \cdot x_1 + y \cdot y_1.$$

Свойства скалярного произведения. Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и числа α справедливы следующие равенства. 1). $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$. 2). $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$. 3). $(\alpha\overline{a}) \cdot \overline{b} = \alpha(\overline{a} \cdot \overline{b})$. 4). $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$.

Число $\overline{a}\cdot\overline{a}$ обозначается $\overline{a}^2$ и называется скалярным квадратом вектора $\overline{a}$: $\overline{a}^2 = \overline{a}\cdot\overline{a}$. Свойство 4) можно переписать так: $|\overline{a}|^2 = \overline{a}^2$.

Доказательство первых трех свойств проводится непосредственным вычислением левых и правых частей равенств в координатах, свойство 4) вытекает из следствия теоремы 1.6.

Теорема 1.7 *Для ненулевых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ скалярное произведение*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}).$$

■ Сначала покажем, что скалярное произведение не зависит от выбора декартова базиса в котором оно рассматривается. Для этого найдем $(\overline{a} - \overline{b})^2$. Используя свойства скалярного произведения, запишем $(\overline{a} - \overline{b})^2 = (\overline{a} - \overline{b})(\overline{a} - \overline{b}) = \overline{a}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2$. Отсюда: $\overline{a}\cdot\overline{b} = \frac{1}{2}(\overline{a}^2 + \overline{b}^2 - (\overline{a} - \overline{b})^2)$ или $\overline{a}\cdot\overline{b} = \frac{1}{2}(|\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - |\overline{a} - \overline{b}|^2)$. Правая часть этого равенства зависит только от длины векторов и, поэтому, не зависит от базиса, следовательно, и левая часть не зависит от базиса. Возьмем тогда декартов базис $\{\overline{i'}, \overline{j'}\}$ так, чтобы $\overline{i'} \uparrow\uparrow \overline{a}$. Тогда $\overline{a} = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{i'}|}\overline{i'}$ или $\overline{a} = (|\overline{a}|, 0)$. По теореме 1.6 найдем координаты вектора $\overline{b}$: $x = |\overline{b}|\cos\measuredangle(\overline{i'}, \overline{b}) = |\overline{b}|\cos\angle(\overline{i'}, \overline{b}) = |\overline{b}|\cos\angle(\overline{a}, \overline{b})$ так как косинус - четная функция, а $y = \pm|\overline{b}|\sin\measuredangle(\overline{i'}, \overline{b})$. Таким образом: $\overline{a} = (|\overline{a}|, 0)$, $\overline{b} = (|\overline{b}|\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}), \pm|\overline{b}|\sin\angle(\overline{i'}, \overline{b})$. Отсюда и из определения скалярного произведения получаем: $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a}, \overline{b})$. ■

Следствия. Зная координаты векторов, можно вычислить угол между векторами. Из теоремы 2.7: $\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$ или

$$\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{xx_1 + yy_1}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}}.$$

В частности, $\overline{a} \perp \overline{b} \iff xx_1 + yy_1 = 0$.

Скалярное произведение позволяет доказать основное свойство ориентированных углов.

Теорема 1.8 *Справедливы следующие свойства ориентированных углов: для любых векторов* $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$

$$\begin{array}{l} 1)\ \measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = -\measuredangle(\overline{b},\overline{a}), \\ 2)\ \measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = \measuredangle(\overline{a},\overline{c}) + \measuredangle(\overline{c},\overline{b}) + 2\pi k, \end{array}$$

при этом $k = -1, 0, 1$ *всякий раз подбирается так, чтобы правая часть в 2) принадлежала* $[-\pi, \pi]$.

■ 1). Если $\{\overline{a},\overline{b}\}$ левый базис, то $\{\overline{b},\overline{a}\}$ правый базис и наоборот. Считаем, что $\{\overline{a},\overline{b}\}$ - левый базис. Тогда $\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = -\angle(\overline{a},\overline{b})$, $\measuredangle(\overline{b},\overline{a}) = \angle(\overline{b},\overline{a}) = \angle(\overline{a},\overline{b})$. Отсюда $\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = -\measuredangle(\overline{b},\overline{a})$. Если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, то $\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = -\measuredangle(\overline{b},\overline{a}) = \angle(\overline{a},\overline{b}) = 0$. Если $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, то $\measuredangle(\overline{a},\overline{b})$ и $\measuredangle(\overline{b},\overline{a})$ могут быть либо π, либо $-\pi$. Подбираем их так, чтобы 1) выполнялось.

2). Так как направленный угол не зависит от длины векторов, то можно дальше считать, что $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1$. Возьмем правый декартов базис $\{\overline{i},\overline{j}\}$ такой, чтобы $\overline{i} = \overline{c}$ и будем доказывать равенство 2) в виде: $\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = \measuredangle(\overline{a},\overline{i}) + \measuredangle(\overline{i},\overline{b}) + 2\pi k$. Пусть $\alpha = \measuredangle(\overline{i},\overline{a})$, $\beta = \measuredangle(\overline{i},\overline{b})$. По теореме 1.6: $\overline{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\overline{b} = (\cos\beta, \sin\beta)$. Определитель матрицы перехода от базиса $\{\overline{i},\overline{j}\}$ к базису $\{\overline{a},\overline{b}\}$ равен

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta = \sin(\beta-\alpha).$$

Так как $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$, то $\beta - \alpha \in [-2\pi, 2\pi]$. Рассмотрим два случая:

а). Пусть $\{\overline{a},\overline{b}\}$ - правый базис, то есть $\sin(\beta-\alpha) > 0$ или $0 < \beta - \alpha < \pi$, $-2\pi < \beta - \alpha < -\pi$. По определению ориентированного угла и скалярного произведения,

$\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = \angle(\overline{a},\overline{b}) = \arccos\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \arccos\overline{a}\cdot\overline{b} = \arccos(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \arccos\cos(\beta-\alpha)$.

Известно, что $\arccos\cos x = x$, если $0 < x < \pi$. Пусть $-2\pi < x < -\pi$. Найдем $\arccos\cos x$. Прибавим к каждой части последних неравенств 2π : $0 < x + 2\pi < \pi$. Поэтому $\arccos\cos(x+2\pi) = x + 2\pi$. Но, $\cos(x+2\pi) = \cos x$. Поэтому $\arccos\cos x = x + 2\pi$. Отсюда получаем:

$$\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = \arccos\cos(\beta-\alpha) = \begin{cases} \beta-\alpha, & \text{если } 0 < \beta-\alpha < \pi \\ \beta-\alpha+2\pi, & \text{если } -2\pi < \beta-\alpha < -\pi. \end{cases}$$

б). Пусть $\{\overline{a},\overline{b}\}$ - левый базис, то есть $\sin(\beta-\alpha) < 0$ или $\pi < \beta - \alpha < 2\pi$, $-\pi < \beta - \alpha < 0$. Тогда, находя нужные углы описанным выше способом, получим:

$$\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = -\angle(\overline{a},\overline{b}) =$$

$$-\arccos\cos(\beta-\alpha) = -\begin{cases} 2\pi-(\beta-\alpha), & \text{если } \pi < \beta-\alpha < 2\pi \\ -(\beta-\alpha), & \text{если } -\pi < \beta-\alpha < 0. \end{cases}$$

Объединяя случаи а) и б), получим: $\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = \beta - \alpha + 2\pi k$, или $\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = \measuredangle(\overline{a},\overline{i}) + \measuredangle(\overline{i},\overline{b}) + 2\pi k$, $k = -1, 0, 1$. ■

Следствия. Для произвольных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ выполняются следующие равенства:

$$\sin\left(\measuredangle(\overline{a},\overline{c}) + \measuredangle(\overline{c},\overline{b})\right) = \sin\measuredangle(\overline{a},\overline{b}), \quad \cos\left(\measuredangle(\overline{a},\overline{c}) + \measuredangle(\overline{c},\overline{b})\right) = \cos\measuredangle(\overline{a},\overline{b}).$$

Если положить $\overline{c} = -\overline{b}$, то получим, что

$$\sin\left(\measuredangle(\overline{a},-\overline{b}) + \pi\right) = \sin\measuredangle(\overline{a},\overline{b}), \quad \cos\left(\measuredangle(\overline{a},-\overline{b}) + \pi\right) = \cos\measuredangle(\overline{a},\overline{b}),$$

или

$$-\sin\measuredangle(\overline{a},-\overline{b}) = \sin\measuredangle(\overline{a},\overline{b}), \quad -\cos\measuredangle(\overline{a},-\overline{b}) = \cos\measuredangle(\overline{a},\overline{b}),$$

Отсюда получаем

$$tg\measuredangle(\overline{a},\overline{b}) = tg\measuredangle(\overline{a},-\overline{b}).$$

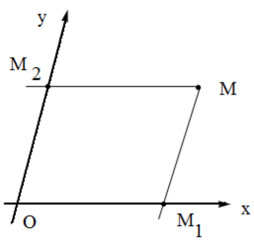
2 Метод координат на плоскости

Общая задача аналитической геометрии состоит в изучении геометрических фигур методами линейной алгебры. На плоскости или в пространстве вводятся система координат и координаты точек, что позволяет задавать геометрические фигуры системами уравнений и неравенств. Исследование геометрических фигур сводят к исследованию соответствующих систем уравнений и неравенств. Другая важная задача аналитической геометрии заключается в изучении геометрических фигур, заданных данными уравнениями или неравенствами. Эти основные положения аналитической геометрии впервые были сформулированы в XVII веке в работах П.Ферма и Р.Декарта.

2.1 Аффинная система координат на плоскости

Рассмотрим на плоскости две непараллельные прямые. Точка O их пересечения делит каждую прямую на два луча с вершиной в точке O. Один из лучей каждой прямой отметим стрелкой. Выберем на каждой прямой единицы длины (масштабы), причем не обязательно равные. Упорядоченную пару таких прямых назовем **аффинной системой координат** на плоскости. Точка O называется началом аффинной системы координат, первая прямая - осью OX, x-ов или абсцисс, вторая - осью OY, y-ов или ординат, лучи, отмеченные стрелкой - положительными полуосями, дополнительные к ним лучи - отрицательными полуосями. Одно из обозначений системы координат: XOY.

Аффинная система координат, состоящая из двух перпендикулярных осей с единичными масштабными отрезками на осях координат, называется **декартовой** или



прямоугольной системой координат. Следовательно, аффинная система координат является обобщением декартовой, школьной системы координат. Аффинная система координат - это один из многих способов сопоставления точкам плоскости пар действительный чисел - координат точек. Делается это так. Обозначим через a единицу масштаба оси OX, b - оси OY. Пусть прямые, проходящие через точку M плоскости параллельно координатным осям, пересекают оси OX и OY в точках M_1 и M_2 соответственно. Пусть $x = \frac{OM_1}{a}$, если M_1 лежит на положительной полуоси или $M_1 = O$ и $x = -\frac{OM_1}{a}$, если M_1 лежит на отрицательной полуоси. Другими словами, x - это расстояние с учетом знака от точки M_1 до O в масштабе оси OX. Аналогично, $y = \pm\frac{OM_2}{b}$, где "+", если точка M_2 лежит на положительной полуоси или $M_2 = O$ и "-", если M_2 лежит на отрицательной полуоси OY.

Упорядоченную пару чисел x, y называют **координатами** точки M в аффинной системе координат XOY. Обозначение: $M(x, y)$.

Вектор $\overline{OM}$ называется **радиус-вектором** точки M. Точки M_1, M_2 называются проекциями точки M на оси координат. В случае декартовой системы координат точки M_1, M_2 будут и ортогональными проекциями точки M на оси координат. Если $M \in OX$, то $M(x, 0)$, если $M \in OY$, то $M(0, y)$; начало координат $O(0, 0)$. Отрезки $[OA]$ и $[OB]$, где $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, лежат на положительных полуосях и являются единичными отрезками осей OX, OY соответственно.

Пример. Построить точку $M(2, 3)$. Возьмем на осях координат точки $M_1(2, 0)$ и $M_2(0, 3)$ и проведем через них прямые параллельные осям координат. Пересечение этих прямых и будет точка M.

Базис системы координат. С каждой аффинной системой координат естественным образом связан базис векторов плоскости. Векторы $\bar{e}_1 = \overline{OA}$, $\bar{e}_2 = \overline{OB}$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, параллельны осям координат и поэтому векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ не параллельны. По лемме 2.5 $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ - линейно независимы, следовательно векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ образуют базис векторов плоскости: $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Будем называть его базисом данной системы координат.

Теорема 2.1 *Точка M имеет координаты (x, y) в аффинной системе координат XOY тогда и только тогда, когда (x, y) есть координаты вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ системы координат XOY.*

■ 1). Пусть точка M имеет координаты x, y в системе координат XOY. Прямая, проходящая через точку M параллельно оси OY пересекает ось x-ов в точке $M_1(x, 0)$, где $x = \pm\frac{OM_1}{OA}$, где выбирается знак "+", если точка M_1 лежит на луче $[OA)$, $A(1, 0)$ или $\overline{OA} \uparrow\uparrow \overline{OM}_1$ и знак "-", если M_1 лежит на луче, дополнительном к $[OA)$ или $\overline{OA} \uparrow\downarrow \overline{OM}_1$. Из леммы 2.4: $\overline{OM}_1 = \pm\frac{|\overline{OM}_1|}{|\overline{OA}|}\overline{OA}$, где "+", если $\overline{OA} \uparrow\uparrow \overline{OM}_1$ и "-", если $\overline{OA} \uparrow\downarrow \overline{OM}_1$. В обоих случаях $\pm\frac{|\overline{OM}_1|}{|\overline{OA}|} = x$, а $\overline{OM}_1 = x\overline{OA} = x\bar{e}_1$. Аналогично, $\overline{OM_2} = y\bar{e}_2$. Отсюда $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$, следовательно, $\overline{OM} = (x, y)$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

2). Пусть радиус-вектор $\overline{OM}$ имеет координаты x, y в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ а $M(x_1, y_1)$ в системе координат XOY. По части первой доказательства теоремы $\overline{OM} = (x_1, y_1)$ в $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. В силу единственности координат векторов: $x = x_1$, $y = y_1$. ■

Следствие. Каждая точка плоскости имеет единственную пару координат в данной системе координат.

Аффинную систему координат можно задать и другим способом: возьмем некоторую точку O плоскости и некоторый базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Эта совокупность порождает систему координат: точка O - начало системы координат, оси координат параллельны векторам базиса, масштабы на осях равны $|\bar{e}_1|$, $|\bar{e}_2|$, положительные полуоси определяются направлением базисных векторов. Поэтому систему координат обозначают еще и так: $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$. В частности, $R = (O, \overline{i}, \overline{j})$ - декартова система координат, если $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ - декартов базис.

Теорема 3.1 позволяет дать эквивалентное определение координат: координатами точки M в системе координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$.

Отметим, что аффинную систему координат можно задать, указав три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой: O - начало координат, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ - базисные векторы. Так заданную систему координат будем обозначать тройкой базисных точек: $R = (O, A, B)$. Если $R = (O, A, B)$ - декартова система координат, то ясно, что $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 1$, $OA \perp OB$.

Задача 1. Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ в аффинной системе координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$. Найти модуль вектора $\overline{AB}$ (длину отрезка AB), если R - декартова система координат.

■ По теореме 3.1 $\overline{OA} = (x_1, y_1)$, $\overline{OB} = (x_2, y_2)$. Так как $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, то из теоремы 2.2 получим

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Следствие из теоремы 2.6 позволяет вычислить модуль вектора (или длину отрезка AB) в случае декартовой системы координат:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \ ■$$

Задача 2. **Простое отношение трех точек прямой.** Точка M на прямой AB делит отрезок AB в отношении λ, если $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$. Число λ называется **простым отношением трех точек** A, B, M и обозначается так: $\lambda = (A, B; M)$.

Например, для середины M отрезка AB справедливо равенство $\overline{AM} = \overline{MB}$, поэтому простое отношение таких точек $\lambda = (A, B; M) = 1$.

Из определения простого отношения следует, что точка M принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда $\lambda = (A, B; M) > 0$.

Найдем теперь координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок AB, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, в отношении $\lambda \neq -1$. По определению простого отношения $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$. Применяя задачу 1 и теорему 2.2, получим, что $x - x_1 = \lambda(x - x_2)$, $y - y_1 = \lambda(y - y_2)$. Отсюда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка AB ($\lambda = 1$) определяются из равенств:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Задача 3. Доказать, что площадь S треугольника $\triangle ABC$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ можно вычислить по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

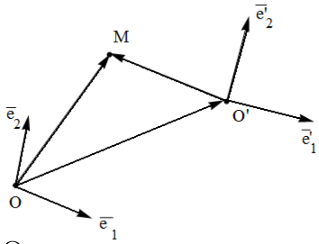
2.2 Преобразование аффинной системы координат

Пусть даны две аффинные системы координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ и $R' = (O', \overline{e}'_1, \overline{e}'_2)$, причем $O'(x_0, y_0)$ в системе координат R и

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= c_{11}\overline{e}_1 + c_{12}\overline{e}_2, \\ \overline{e}'_2 &= c_{21}\overline{e}_1 + c_{22}\overline{e}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть точка M имеет координаты x, y в системе координат R и x', y' в системе координат R'. Выразим x, y через x', y', то есть найдем формулы пересчета координат одной и той же точки в двух разных системах координат.

■ Для этого найдем координаты векторов $\overline{OM}$, $\overline{OO'}$ и $\overline{O'M}$ в одном и том же базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$. По теореме 3.1: $\overline{OM} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2$, $\overline{OO'} = x_0\overline{e}_1 + y_0\overline{e}_2$, $\overline{O'M} = x'\overline{e}_1 + y'\overline{e}_2$ или, учитывая (1), запишем $\overline{O'M} = x'(c_{11}\overline{e}_1 + c_{12}\overline{e}_2) + y'(c_{21}\overline{e}_1 + c_{22}\overline{e}_2) = (c_{11}x' + c_{21}y')\overline{e}_1 + (c_{12}x' + c_{22}y')\overline{e}_2$. По определению сложения векторов $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$. Подставим сюда найденные разложения: $x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 = (c_{11}x' + c_{21}y')\overline{e}_1 + (c_{12}x' + c_{22}y')\overline{e}_2 + x_0\overline{e}_1 + y_0\overline{e}_2$.



Отсюда, в силу единственности координат вектора, получим искомые формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{21}y' + x_0, \\ y &= c_{12}x' + c_{22}y' + y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Матрица $C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется **матрицей преобразования координат**. Сравнивая ее с матрицей перехода от базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ к базису $\{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2\}$: $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, видим, что $\det C' = \det C \neq 0$. Поэтому равенства (2), рассматривая их как систему двух уравнений относительно неизвестных x', y', можно разрешить относительно x', y' (скажем, методом подстановки):

$$\begin{aligned} x' &= b_{11}x + b_{12}y + x'_0, \\ y' &= b_{21}x + b_{22}y + y'_0, \end{aligned} \tag{3}$$

коэффициенты вычислены обычным способом из (2).

Отметим, что, если нам заданы равенства вида (2) при условии, что определитель

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то нам заданы формулы преобразования координат для двух систем координат, связанных между собой соотношением (1), при этом коэффициенты в (1) берутся из (2).

Пример. Напишем формулы (2) для $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ и $R' = (O', \overline{e}_1, \overline{e}_2)$, $O'(x_0, y_0)$. Будем говорить, что система координат R' получена из системы координат R переносом R в точку O. Если обозначим базис R' через $\{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2\}$, то равенства (1) в данном случае примут вид: $\overline{e}'_1 = \overline{e}_1$, $\overline{e}'_2 = \overline{e}_2$, то есть $c_{11} = c_{22} = 1$, $c_{12} = c_{21} = 0$. Подставляя найденные коэффициенты в (2), получим:

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Если точка M имеет, например, координаты $(1, 0)$ в R', то в R она имеет координаты $(1 + x_0, y_0)$.

Преобразование декартовой системы координат. Решим предыдущую задачу для случая двух декартовых систем координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ и $R' = (O', \bar{i}', \bar{j}')$. Для этого уточним формулы (1) и (2).

■ Пусть $\alpha = \measuredangle(\bar{i}, \bar{i}')$, $\beta = \measuredangle(\bar{i}, \bar{j}')$ - направленные углы. Так как $|\bar{i}| = |\bar{i}'| = 1$, то по теореме 1.6:

$$\begin{aligned} \bar{i}' &= (\cos\alpha)\bar{i} + (\tau \sin\alpha)\bar{j}, \\ \bar{j}' &= (\cos\beta)\bar{i} + (\tau \sin\beta)\bar{j}. \end{aligned} \tag{1'}$$

где $\tau = +1$, если базис $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ - правый и $\tau = -1$, если этот базис левый. Сравнивая с (1), получим $c_{11} = \cos\alpha$, $c_{12} = \tau \sin\alpha$, $c_{21} = \cos\beta$, $c_{22} = \tau \sin\beta$. Из теоремы 2.8: $\beta = \measuredangle(\bar{i}, \bar{j}') = \measuredangle(\bar{i}, \bar{i}') + \measuredangle(\bar{i}', \bar{j}') + 2\pi k = \alpha \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где "+", если базис $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$ - правый (и, поэтому, $\measuredangle(\bar{i}', \bar{j}') = \frac{\pi}{2}$) и "-", если базис $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$ - левый ($\measuredangle(\bar{i}', \bar{j}') = -\frac{\pi}{2}$). Отсюда находим коэффициенты в (1): $c_{21} = \cos\beta = \cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k) = \cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \sin\alpha = -\varepsilon \sin\alpha$, $c_{22} = \tau \sin\beta = \tau \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k) = \pm\tau\cos\alpha = \varepsilon\tau\cos\alpha$, где $\varepsilon = +1$ для правого базиса $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$, $\varepsilon = -1$ - для левого базиса $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$. Теперь формулы (1) (или (1')) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{i}' &= (\cos\alpha)\bar{i} + (\tau \sin\alpha)\bar{j}, \\ \bar{j}' &= (-\varepsilon \sin\alpha)\bar{i} + (\varepsilon\tau \cos\alpha)\bar{j}, \end{aligned} \tag{1''}$$

а формулы (2) соответственно изменятся следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y'\varepsilon \sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\tau \sin\alpha + y'\varepsilon\tau \cos\alpha + y_0. \end{aligned} \tag{2'}$$

Здесь $\tau = +1$ ($\tau = -1$) для правого (левого) базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, $\varepsilon = +1$ ($\varepsilon = -1$) для правого (левого) базиса $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$.

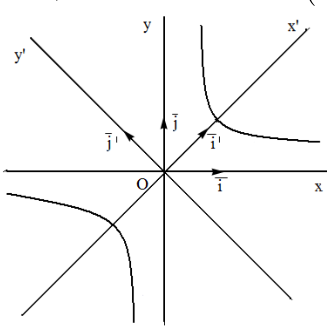
Назовем две системы координат **одинаково (противоположно) ориентированными**, если их базисы одинаково (противоположно) ориентированы. Обозначение: $R\omega R'$- для одинаково ориентированных и $R\overline{\omega}R'$-для противоположно ориентированных систем координат.

Если известны только формулы (2), то можно составить равенства (1) и найти определитель матрицы перехода от базиса первой системы координат к базису второй:

$$\det C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $R\omega R'$, если $\det C > 0$ и $R\overline{\omega}R'$, если $\det C < 0$.

Пример. Напишем формулы $(2')$ для двух правых декартовых систем координат с общим началом: $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ и $R' = (O, \bar{i}', \bar{j}')$. Можно сказать, что система координат R' получена из системы координат R поворотом R около начала координат на угол α против часовой стрелки, если $\alpha > 0$ и по часовой стрелки, если $\alpha < 0$. Так как системы координат правые, то положим в $(2')$ $\tau = +1$, $\varepsilon = +1$:



$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

Возьмем для определенности $\alpha = \measuredangle(\bar{i}, \bar{i}') = 45^\circ$, получим, что

$$x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}, \;\; y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{5'}$$

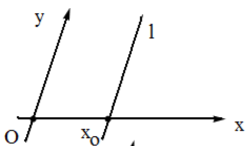
Если $xy = 1$ уравнение гиперболы в системе координат R, то, подставляя в уравнение гиперболы вместо x, y их выражения из $(5')$, получим уравнение гиперболы в системе координат $R' : (x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2})(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$ или $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$. Заметим, что замена в последнем уравнении x', y' по формулам, полученным из $(5')$ после их разрешения (как уравнений) относительно x', y', получим, очевидно, первоначальное уравнение гиперболы в системе координат R.

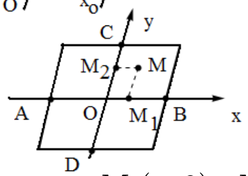
2.3 Уравнение множества точек

Зафиксируем на плоскости некоторую систему координат, координаты точек в которой будем обозначать x, y.

Уравнением множества F плоскости называется такая система уравнений и неравенств относительно переменных x, y, что любые ее решения и только они являются координатами точек, принадлежащих F. При этом допускается, что система может не содержать уравнений или неравенств или состоять, например, из одного уравнения. Допустимые термины: "множество, заданное системой уравнений", "множество, заданное неравенствами."

Примеры. 1). Уравнение прямой l, параллельной оси OY : $x - x_0 = 0$, x_0 - абсцисса точки пересечения l и оси OX. Действительно, если $M(x, y) \in l$, то по определению координат точек $x = x_0$, то есть координаты x, y точки $M \in l$ удовлетворяют уравнению $x - x_0 = 0$. С другой стороны, если x, y- решение уравнения $x - x_0 = 0$, то есть $x = x_0$. Тогда $M(x_0, y)$ лежит на данной прямой l.





2). Пусть F-параллелограмм с центром в точке O и сторонами длины $2a$ и $2b$ параллельными осям координат. Тогда уравнением множества A является система:

$$\begin{cases} x \geqslant -a, \quad x \leqslant a, \\ y \geqslant -b, \quad y \leqslant b. \end{cases} \tag{1}$$

■ Действительно, $M(x, y) \in F$ тогда и только тогда, когда проекции $M_1(x, 0)$, $M_2(0, y)$ точки M принадлежат средним линиям параллелограмма AB и CD, что равносильно неравенствам (1) ■

Лемма 2.1 *Пусть множество F задано уравнением $f(x, y) = 0$, а множество G уравнением $g(x, y) = 0$. Тогда пересечение этих множеств $F \cap G$ задается системой уравнений* $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ *(2), а объединение этих множеств $F \cup G$ уравнением* $f(x, y) \cdot g(x, y) = 0$.

■ Докажем первое утверждение. Пусть $M(x, y) \in F \cap G$, тогда $M \in F$ и $M \in G$, следовательно, координаты x, y точки M удовлетворяют уравнениям множеств F и G, то есть системе (2). Если x, y - решение (2), то x, y - решение первого и решение второго уравнения системы, следовательно, $M(x,y) \in F$ и $M(x,y) \in G$, то есть $M(x,y) \in F \cap G$. Аналогично доказывается второе утверждение леммы. ■

Первую часть леммы 3.1 мы будем неоднократно применять.

Задача. Какими уравнениями задаются множества $F \cap G$, $F \cup G$, $F \backslash G$ или $F \vartriangle G$, если

$$\text{а) } F : \begin{cases} f_1(x,y) = 0, \\ f_2(x,y) = 0, \end{cases} \quad G : \begin{cases} g_1(x,y) = 0, \\ g_2(x,y) = 0; \end{cases} \quad \text{б) } F : f(x,y) = 0,\ G : g(x,y) \leqslant 0?$$

Сформулируйте эту задачу в самом общем виде и решите ее.

Алгебраической линией называется множество, заданное в некоторой аффинной системе координат уравнением вида

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0; \tag{3}$$

здесь коэффициенты - действительные числа, причем a, b, c, d, e не равны нулю одновременно. Степень многочлена в (3) называется порядком алгебраической линии. Так, если в (3) a, b, c не равны нулю одновременно, то уравнение (3) задает алгебраическую линию 2-го порядка, если $a = b = c = 0$, но d, e одновременно не нули, то (3) задает алгебраическую линию 1-го порядка.

Пример. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ есть алгебраическая линия 2-го порядка, так как ее уравнение есть уравнение (3) при $a = c = 1,\ \ f = -1,\ \ b = d = e = 0$. Прямая $x - x_0 = 0$ - алгебраическая линия 1-го порядка.

Теорема 2.2 *Порядок алгебраической линии не зависит от выбора системы координат.*

■ Докажем теорему только для алгебраических линий первого прядка. В общем случае теорема доказывается аналогично с привлечением теории матриц. Пусть множество F задано уравнением вида: $dx + ey + f = 0$, $d^2 + e^2 \neq 0$, в аффинной системе координат R и, поэтому является алгебраической линией первого порядка. Пусть R' другая система координат. Покажем, что в системе координат R' множество F также задается уравнением первого порядка. Для этого напишем формулы преобразования координат для R и R' : $x = c_{11}x' + c_{21}y' + x_0$, $\ y = c_{12}x' + c_{22}y' + y_0$ и найдем уравнение F в системе координат R': подставим x, y в уравнение $dx + ey + f = 0$. Получим уравнение $(dc_{11} + ec_{21})x' + (dc_{12} + ec_{22})y' + dx_0 + ey_0 + f = 0$. Предположим, что это уравнение не первого порядка, то есть коэффициенты при переменных одновременно равны нулю: $dc_{11} + ec_{21} = 0$, $dc_{12} + ec_{22} = 0$. Так как $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ (§3.2), то данная система имеет нулевое решение $d = e = 0$. Но, коэффициенты $d,\ e$ не равны нулю одновременно. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

В некоторых случаях удобно задавать множества **параметрическими** уравнениями. Приведем пример такого задания. Уравнения $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$ (4), $\varphi(t),\ \ \psi(t)$ - функции, определенные на интервале J, называются **параметрическими уравнениями** множества F, если для любого значения $t \in J$ точка с координатами $\varphi(t), \psi(t)$ принадлежит F и для координат x, y любой точки $M \in F$ существует $t \in J$ такое, что x, y, t связаны уравнениями (4). При этом, t называется параметром точки M.

Пример. Уравнения $x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ t \in J = [-\pi, \pi]$, есть параметрические уравнения окружности с центром в $O(0,0)$ и радиуса 1. Действительно, для любого t :

$x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$, следовательно, точка $M(\cos t, \sin t)$ лежит на окружности. Пусть теперь точка $M(x,y)$ лежит на окружности и $t=\measuredangle(\bar{i},\overline{OM})$ направленный угол. Тогда $\overline{OM}(\cos t, \sin t)$, значит $M(\cos t, \sin t)$ или $x=\cos t, y=\sin t$.

2.4 Различные способы задания прямой на плоскости

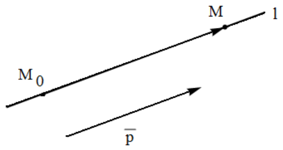
Напомним определения: вектор $\overline{AB}$ параллелен (перпендикулярен) прямой l, если отрезок AB параллелен (перпендикулярен) прямой l. Обозначения: $\overline{AB}||l$, $\overline{AB}\perp l$. **Ненулевой** вектор $\overline{p}$, параллельный прямой l, называется **направляющим** вектором прямой l. Ненулевой вектор $\overline{n}$, перпендикулярный прямой l, называется **нормальным** вектором прямой l. Таких векторов для данной прямой существует много.

Рассмотрим некоторые способы задания прямой, и в каждом случае выведем уравнение прямой в некоторой аффинной системе координат.

1). **Прямая l задана точкой и направляющим вектором**. Напишем уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно вектору $\overline{p}=(\alpha,\beta)\neq\overline{0}$. Ясно, что такая прямая существует и единственна.

■ Точка $M(x,y)\in l$ тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}||\overline{p}$. Последнее условие равносильно:

а) существованию числа $t\in(-\infty,+\infty)$ такого, что $\overline{M_0M}=t\overline{p}$ (лемма 2.4) или в координатах $x-x_0=\alpha t,\quad y-y_0=\beta t$ или



$$\begin{array}{l} x=x_0+\alpha t, \\ y=y_0+\beta t, \end{array} \qquad t\in(-\infty,+\infty). \tag{1}$$

Уравнение (1) называется параметрическим уравнением прямой (см. конец §3.3).

б) по теореме 2.4:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Уравнение (2) часто будем применять на практике. Раскроем определитель в (2) и приведем уравнение прямой к виду $Ax+By+C=0$, где $A=\beta$, $B=-\alpha$, $C=-\beta x_0+\alpha y_0$. К такому же уравнению можно привести уравнения (1), исключая из них параметр t.

в) в силу теоремы 2.3, при условии, что $\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0:$

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}. \tag{3}$$

Уравнение (3) называется **каноническим** уравнением прямой. ■

Замечание. В каноническом уравнении можно допустить "деление на ноль", то есть можно считать, что $\alpha=0$ или $\beta=0$, понимая, при этом, что при $\alpha=0$ формальная запись (3) означает уравнение (2), в котором $\alpha=0$, то есть уравнение вида $x-x_0=0$, а при $\beta=0$, под формальной записью (3) понимаем уравнение $y-y_0=0$.

Пример. Напишем каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,2)$ параллельно вектору $\overline{p}=(2,-1)$: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}$. Это уравнение можно привести к виду $x+2y-5=0$.

Уравнение оси OX : $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$ или $y=0$.

2). **Уравнение прямой, заданной двумя точками**.

Напишем уравнение прямой l, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

■ Так как $M_1 \neq M_2$, то вектор $\overline{p} = \overline{M_1M_2}$ - направляющий вектор прямой l. Поэтому прямую l можно перезадать: считать, что прямая l проходит через точку $M_1 \in l$, параллельно вектору $\overline{p}$. Так как $\overline{p} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, то, используя (3), получим уравнение прямой l, заданной двумя точками:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4}$$

В частности, если прямую l задать ее точками пересечения с осями координат $M_1(a, 0)$, $M_2(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то уравнение (4) примет вид: $\frac{x-0}{0-a} = \frac{y-0}{b}$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это уравнение называется **уравнением прямой в отрезках**. Здесь $|a|, |b|$ - длины отрезков, которые прямая "отсекает" от осей координат. ■

3). **Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** В этом и следующем пункте система координат декартова. Пусть $\overline{p}$ - направляющий вектор прямой l, не параллельной оси OY, и $\alpha = \measuredangle(\overline{i}, \overline{p})$- направленный угол. (В школе его называют углом наклона прямой к оси OX). Число $k = tg\alpha$ называется **угловым коэффициентом** прямой; для прямых $l||OY$ он не определен. Этот коэффициент не зависит от выбора направляющего вектора прямой: если $\overline{p}_1 \uparrow\uparrow \overline{p}$, то $tg\measuredangle(\overline{i}, \overline{p}) = tg\measuredangle(\overline{i}, \overline{p}_1)$ так как направленный угол не зависит от длины вектора; если $\overline{p}_1 = -\overline{p}$, то $tg\measuredangle(\overline{i}, \overline{p}) = tg\measuredangle(\overline{i}, \overline{p}_1)$ в силу следствия из теоремы 2.8.

Пусть теперь прямая l с угловым коэффициентом k проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$. Напишем уравнение прямой l.

■ Пусть $\overline{p}$ - направляющий вектор l, $\alpha = \measuredangle(\overline{i}, \overline{p})$. По теореме 1.6 можно записать $\overline{p} = (|\overline{p}| \cos\alpha, |\overline{p}| \sin\alpha)$, а, применяя уравнение (2), получим уравнение прямой l:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ |\overline{p}| \cos\alpha & |\overline{p}| \sin\alpha \end{vmatrix} = 0$$

или $y - y_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x - x_0)$ или

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{5}$$

Геометрический смысл коэффициента k в (5) заключен в определении углового коэффициента. Уравнение (5) можно переписать еще так $y = kx + b$, где $b = y_0 - kx_0$. Геометрический смысл $b : |b|$ - это длина отрезка, отсекаемого прямой l от оси OY. Другими словами, точка с координатами $(0, b)$ есть точка пересечения l и оси OY. ■

4). **Уравнение прямой l, заданной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и нормальным вектором $\overline{n}(A, B)$.**

Точка $M(x, y) \in l$ тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$ или $\overline{M_0M} \cdot \overline{n} = \overline{0}$. Запишем скалярное произведение в координатах и получим искомое уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

2.5 Общее уравнение прямой

Все уравнения прямой §3.4 можно привести к виду $Ax+By+C=0$, A, B одновременно не нули. Следовательно, прямая - это алгебраическая линия 1-го порядка. Верно и обратное утверждение.

Теорема 2.3 *Множество, заданное уравнением вида $Ax+By+C=0$ (1), где коэффициенты A, B одновременно не обращаются в ноль, есть прямая, параллельная вектору $\overline{p}(-B, A)$ и проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, x_0, y_0- решения (1).*

■ Так как A и B не нули одновременно, то уравнение (1) имеет решение, например, $x_0=-\frac{C}{A}$, $y_0=0$, если $A\neq 0$ и $x_0=0$, $y_0=-\frac{C}{B}$, если $B\neq 0$. Считаем для определенности, что $A\neq 0$. Напишем уравнение прямой, проходящей через точку $M(-\frac{C}{A}, 0)$, параллельно вектору $\overline{p}(-B, A)$. Воспользуемся уравнением 2 §3.4: $\begin{vmatrix} x+\frac{C}{A} & y \\ -B & A \end{vmatrix}=0$ или, раскрыв определитель, получим $Ax+By+C=0$. Это уравнение прямой в точности совпадает с уравнением (1). Поэтому (1) - есть уравнение прямой, проходящей параллельно вектору $\overline{p}(-B, A)$ и содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, x_0, y_0 - решение (1). ■

Уравнение вида (1) называется **общим уравнением прямой**.

Вектор $\overline{p}(-B, A)$ - направляющий вектор прямой $Ax+By+C=0$.

Например, $2x-y+1=0$ - общее уравнение прямой с направляющим вектором $\overline{p}(1, 2)$ и проходящей через точку с координатами (0,1).

Исследование расположения прямой относительно аффинной системы координат по ее общему уравнению. Пусть прямая l задана общим уравнением $Ax+By+C=0$ в аффинной системе координат $R=(O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$.

1). Начало координат $O(0,0)$ принадлежит l тогда и только тогда, когда $C=0$.

2). Прямая l параллельна оси OX тогда и только тогда, когда ее направляющий вектор $\overline{p}(-B, A)||\overline{e}_1$. Так как $\overline{e}_1=(1,0)$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, то параллельность векторов по теореме 2.4 равносильна равенству $\begin{vmatrix} -B & A \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$ или $A=0$. Таким образом: $l||OX \iff A=0$. Аналогично $l||OY \iff B=0$.

Например, прямая $l: 2x-3=0$ параллельна оси OY так как коэффициенты при y в уравнении этой прямой равен 0; l пересекает ось OX в точке $M(\frac{3}{2}, 0)$.

Лемма 2.2 *Пусть прямая l задана общим уравнением в декартовой системе координат. Вектор $\overline{n}(A, B)$ - нормальный вектор прямой l.*

■ Действительно, так как вектор $\overline{p}(-B, A)$ направляющий вектор прямой и $\overline{n}\cdot\overline{p}=(-B)A+AB=0$, то $\overline{n}\perp l$. ■

Геометрический смысл знака трехчлена $Ax+By+C$.

Пусть l - прямая, заданная общим уравнением $Ax+By+C=0$. Для точки $M(x, y)$ обозначим через $\pi(M)=Ax+By+C$. Точка $M(x, y)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда $\pi(M)=0$.

Выведем одну полезную формулу. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит отрезку PQ, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. Из задачи 2 §3.1 следует, что $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, где $\lambda=(P, Q; M)$ - простое отношение трех точек. Поэтому можно написать, что $\pi(M)=$

$Ax+By+C = A(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}) + B(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}) + C = \frac{1}{1+\lambda}(Ax_1+By_1+C+\lambda(Ax_2+By_2+C))$. Таким образом:

$$\pi(M) = \frac{1}{1+\lambda}(\pi(P)+\lambda\pi(Q)). \tag{1}$$

В этих обозначениях имеет место

Теорема 2.4 *Концы отрезка* $[PQ]$ *не принадлежат прямой* $l : Ax+By+C = 0$. *Тогда*

1). $[PQ]\cap l \neq \emptyset \iff \pi(P)\cdot\pi(Q) < 0$.

2). $[PQ]\cap l = \emptyset \iff \pi(P)\cdot\pi(Q) > 0$.

■ Докажем 1). Из $[PQ]\cap l \neq \emptyset$ следует, что существует точка $M \in [PQ]$ и $M \in l \Rightarrow \lambda = (P,Q;M) > 0$ и $\pi(M) = 0 \Rightarrow$ (по формуле (1)) $\pi(P)+\lambda\pi(Q) = 0,\ \lambda > 0 \Rightarrow \pi(P)\cdot\pi(Q) < 0$. С другой стороны. Пусть теперь отрезок PQ с концами, не принадлежащими прямой l, такой, что $\pi(P)\cdot\pi(Q) < 0$. Тогда найдется число $\lambda > 0$ такое $\pi(P)+\lambda\pi(Q) = 0$. Пусть точка $M \in PQ$ такая, что простое отношение $(P,Q;M) = \lambda$. Отсюда и из (1) получим, что $\pi(M) = 0$, то есть $M \in l$. Таким образом, $[PQ]\cap l \neq \emptyset$.

Вторая часть теоремы доказывается методом "от противного" с использованием уже доказанного утверждения 1). ■

Следствие. 1). Пусть точка $M_0(x,y)$ такая, что $\pi(M_0) = Ax+By+C > 0$, $A^2+B^2 \neq 0$. Пусть π_+ (π_-) полуплоскость ограниченная прямой l: $Ax+By+C=0$ и содержащая (не содержащая) точку M_0. Применяя теорему, запишем, что $\pi_+ = \{M|$ отрезок M_0M не пересекается с прямой $l\} = \{M|\pi(M)\cdot\pi(M_0) > 0\} = \{M|\pi(M) > 0\}$.

Таким образом

$$\pi_+ = \{M|Ax+By+C > 0\}.$$

Другими словами полуплоскость π_+ задается неравенством $Ax+By+C > 0$. Аналогично доказывается, что $\pi_- : Ax+By+C < 0$.

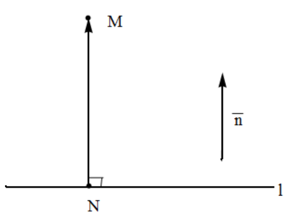
2). Отложим от некоторой точки $D(x,y) \in l$ вектор $\overline{n}(A,B) : \overline{DG} = \overline{n}$. Тогда $G(x+A, y+B)$ и $\pi(G) = A(x+A)+B(y+B)+C = A^2+B^2 > 0$. Таким образом, вектор $\overline{n}(A,B)$ "направлен" в полуплоскость $\pi_+ : Ax+By+C > 0$.

Пример. Пересекает ли отрезок с концами в точках $A(1,2), B(-1,3)$ прямую $l : x-y+1 = 0$? Обозначим через π_+ полуплоскость, заданную неравенством $x-y+1 > 0$. Проверим, лежат ли точки $A(1,2), B(-1,3)$ в этой полуплоскости: $\pi(A) = 2\cdot1-2+1 > 0,\ \ \pi(B) = 2(-1)-3+1 < 0$. Следовательно, $A \in \pi_+,\ \ B \notin \pi_+$, то есть отрезок AB пересекает прямую l.

Расстояние от точки до прямой. Система координат в этом пункте декартова. Найдем расстояние $\rho(M_0,l)$ от точки $M_0(x_0,y_0)$ плоскости до прямой l: $Ax+By+C = 0$.

■ По лемме 3.2 вектор $\overline{n}(A,B)$ есть нормальный вектор прямой l. Пусть $N(x_1,y_1)$ - ортогональная проекция точки M_0 на прямую l. Тогда

$$\rho(M_0,l) = |\overline{NM_0}| = |\overline{NM_0}|\frac{|\overline{n}|}{|\overline{n}|}|\cos\angle(\overline{n},\overline{NM_0})|,$$



так как угол $\angle(\overline{n}, \overline{NM}_0) = 0, \pi$, а $\frac{|\overline{n}|}{|\overline{n}|}|\cos\angle(\overline{n}, \overline{NM}_0)| = 1$. Теперь можно записать, что

$$\rho(M_0, l) = \frac{1}{|\overline{n}|}||\overline{NM}_0||\overline{n}|\cos\angle(\overline{n}, \overline{NM}_0)| =$$

$$\frac{1}{|\overline{n}|}|\overline{NM}_0 \cdot \overline{n}| = \frac{1}{|\overline{n}|}|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)| = \frac{1}{|\overline{n}|}|Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)|.$$

Так как $N \in l$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, поэтому $\rho(M_0, l) = \frac{1}{|\overline{n}|}|Ax_0 + By_0 + C|$. Подставим сюда $|\overline{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ и окончательно получим:

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad \blacksquare \tag{2}$$

Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Рассмотрим две прямые l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Выясним зависимость взаимного расположение прямых на плоскости и коэффициентов в этих уравнениях.

1). Пусть $l_1 || l_2$. Тогда их направляющие векторы $\overline{p}_1(-B_1, A_1)$ и $\overline{p_2}(-B_2, A_2)$ параллельны, следовательно, координаты этих векторов пропорциональны: существует число λ такое, что $-B_1 = \lambda(-B_2)$, $A_1 = \lambda A_2$. Ясно, что верно и обратное утверждение. Таким образом,

$$l_1 || l_2 \iff A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{3}$$

если $A_2B_2 \neq 0$.

2). Пусть $l_1 = l_2$. Это значит, что их направляющие векторы параллельны - существует число λ такое, что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ и найдется точка $M_0(x_0, y_0) \in l_1 \cap l_2$. Тогда уравнение l_1 можно переписать так $\lambda(A_2x + B_2y) + C_1 = 0$. Так как $M_0 \in l_1 \cap l_2$, то $M_0 \in l_1$: $\lambda(A_2x_0 + B_2y_0) + C_1 = 0$ и $M_0 \in l_2$: $(A_2x_0 + B_2y_0) + C_2 = 0$. Из второго уравнения найдем $A_2x_0 + B_2y_0 = -C_2$ и подставим в первое, получим $\lambda C_2 = C_1$. Таким образом, если $l_1 = l_2$, то коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Верно и обратное утверждение: если коэффициенты в уравнениях этих прямых пропорциональны, то, домножая одно из уравнений на коэффициент пропорциональность, получим второе уравнение. Следовательно, $l_1 = l_2$. Итак,

$$l_1 = l_2 \iff A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{4}$$

если $A_2B_2C_2 \neq 0$.

3). Если прямые не параллельны, то они пересекаются в единственной точке, координаты которой есть решения следующей системы:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

4). **Углом** между двумя пересекающимися прямыми на плоскости назовем небольший угол из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Так как косинусы смежных углов равны по абсолютной величине, а косинус не большего угла неотрицателен, то косинус угла α между прямыми можно найти из равенства $\cos\alpha =$

$|\cos\angle(\overline{p}_1, \overline{p_2})|$, где $\overline{p}_1, \overline{p_2}$ направляющие векторы прямых. По следствию из теореме 2.7: $\cos\alpha = \frac{|\overline{p}_1 \cdot \overline{p_2}|}{|\overline{p}_1||\overline{p_2}|}$ или

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Замечание. Пусть дана система двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases}$$

причем коэффициенты при неизвестных в каждом уравнении не равны нулю одновременно. Рассматривая уравнения этой системы как уравнения прямых на плоскости, можно заключить, что данная система имеет единственное решение, если условие (3) не выполняется; если условие (3) выполняется, а (4) - нет, то система не имеет решения; система имеет бесконечное множество решений, если выполняются условия (4), при этом, все решения x, y будут координатами точек, лежащих, например, на прямой $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

3 Кривые второго порядка на плоскости

Алгебраические линии второго порядка традиционно называют кривыми второго порядка. Рассмотрим основные кривые второго порядка на плоскости - эллипс, гиперболу, параболу, дадим их геометрическое определение, выведем уравнения этих кривых. В заключение приведем классификацию кривых второго порядка на плоскости.

3.1 Эллипс

Эллипс - это множество всех точек плоскости, у которых сумма расстояний до двух заданных точек той же плоскости фиксирована.

Обозначения: пусть F_1, F_2 данные точки плоскости, будем называть их **фокусами** эллипса. Для точки M плоскости отрезки $MF_1,\ MF_2$ и их длины r_1, r_2 соответственно называются **фокальными радиусами** точки M. Если M лежит на эллипсе, то существует постоянная, обозначим ее $2a$, не зависящая от точки M, такая, что $r_1 + r_2 = 2a$. Расстояние F_1F_2 называется **фокальным расстоянием** и обозначается $2c$. Будем считать, что $a > c$. В противном случае эллипс выродится в отрезок F_1F_2 $(a = c)$ или будет пустым множеством $(a < c)$.

Уравнение эллипса. Поместим центр декартовой системы координат в середину отрезка F_1F_2, а ось x-ов совместим с прямой (F_1F_2). Напишем уравнение эллипса L с фокусами $F_1,\ F_2$ в этой декартовой системе координат. Пусть $M(x, y) \in L$. Так как $F_1(c, 0),\ F_2(-c, 0)$, то $r_1 = MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},\ \ r_2 = MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. По определению эллипса

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перенесем один корень в правую часть, возведем в квадрат обе части и, затем, оставив корень в одной части уравнения, возведем в квадрат еще раз и, после преобразований, получим $x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$. Обозначим:

$$b^2=a^2-c^2. \tag{1}$$

Тогда последнее соотношение на координаты x, y примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

Рассматривая (2) как уравнение, заключаем, что координаты x, y любой точки эллипса удовлетворяют уравнению (2).

Покажем теперь, что любое решение x, y уравнения (2) есть координаты точки, принадлежащей эллипсу (зачем ?). Если x, y решения (2), то $y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$. Найдем фокальный радиус r_1 точки $M(x,y)$:

$$r_1=MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=$$

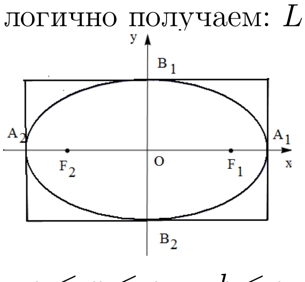
$$\sqrt{x^2\frac{a^2-b^2}{a^2}-2xc+c^2+b^2}=\sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2}-2xc+a^2}=\sqrt{(x\frac{c}{a}-a)^2}=|x\frac{c}{a}-a|.$$

Из (2): $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, то есть $-a\leqslant x\leqslant a$. Поэтому $x\frac{c}{a}-a\leqslant a\frac{c}{a}-a=c-a<0$ для всех x, следовательно, выражение под модулем в r_1 отрицательно, и поэтому $r_1=-(x\frac{c}{a}-a)=a-x\frac{c}{a}$. Аналогично находим, что $r_2=|a+x\frac{c}{a}|$, а, так как $x\frac{c}{a}+a\geqslant -a\frac{c}{a}+a=a-c>0$, то $r_2=a+x\frac{c}{a}$. Отсюда получаем: $r_1+r_2=a-x\frac{c}{a}+a+x\frac{c}{a}=2a$ и $M(x,y)\in L$ по определению эллипса. Теперь можно сказать, что (2) есть уравнение эллипса в соответствии с определением уравнения множества точек.

Эллипс есть обобщение окружности, так как при $a=b$ уравнение (2) примет вид $x^2+y^2=a^2$. Уравнение (2) называется **каноническим** уравнением эллипса, система координат в которой эллипс имеет каноническое уравнение называется канонической.

Исследование эллипса L по его каноническому уравнению.

1). Точка $O(0,0)$ не принадлежит эллипсу, так как ее координаты не удовлетворяют уравнению эллипса. Найдем пересечение L и оси OX. Так как $y=0$ - уравнение оси OX, то множество $L\cap OX$ задается системой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=0$. Решая эту систему, получим $x=\pm a,\ y=0$. Таким образом, $L\cap OX=\{A_1(a,0),A_2(-a,0)\}$. Аналогично получаем: $L\cap OY=\{B_1(0,b),B_2(0,-b)\}$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются



вершинами эллипса, отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются **большой осью** эллипса, a-**большая полуось**. Отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называются **малой осью** эллипса, а b - **малой полуось** эллипса. Если x, y решения (2), то, как уже отмечалось, $|x|\leqslant a$; аналогично можно получить неравенство $|y|\leqslant b$. Поэтому эллипс лежит в прямоугольнике, заданном системой $-a\leqslant x\leqslant a,\ \ -b\leqslant y\leqslant b$. Стороны прямоугольника проходят через вершины эллипса, параллельно осям координат.

2). Исследуем эллипс на симметрию. Напомним определение симметрии: точки $M_1(x,-y), M_2(-x,y)$, $M_3(-x,-y)$ симметричны точке $M(x,y)$ относительно осей координат OX, OY и точки O соответственно. Множество F симметрично относительно, например, оси OX, если для любой точки F, ей симметричная относительно OX

точка, принадлежит F. Проверим эллипс L на симметрию относительно оси OX :

$$M(x,y) \in L \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1 \iff M_1(x,-y) \in L.$$

Эллипс симметричен относительно оси OX. Аналогично устанавливается симметрия эллипса относительно оси OY и точки O.

3). Рассмотрим пересечение эллипса с прямыми, проходящими через начало координат. Запишем такую прямую l параметрическими уравнениями: $x = \alpha t,\ \ y = \alpha t$, где $\overline{p}(\alpha, \beta)$ - направляющий вектор прямой l. Тогда множество $l \cap L$ задается системой трех уравнений $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x = \alpha t,\ y = \alpha t$. Подставим x, y в уравнение эллипса, получим $\frac{(\alpha t)^2}{a^2} + \frac{(\beta t)^2}{b^2} = 1$, отсюда $t = \pm\frac{1}{\sqrt{\delta}}$, где $\delta = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}$. Подставляя найденные значения параметра t в уравнения прямой, получим, что $L \cap l = \{P_1(\frac{\alpha}{\sqrt{\delta}}, \frac{\beta}{\sqrt{\delta}}),\ \ P_2(-\frac{\alpha}{\sqrt{\delta}}, -\frac{\beta}{\sqrt{\delta}})\}$. Отрезки P_1P_2 называются **диаметрами** эллипса.

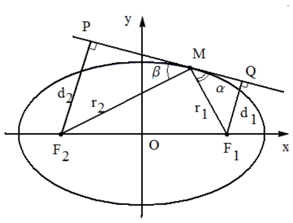
Таким образом, каждая прямая l, проходящая через точку O, пересекает эллипс в двух симметричных точках. При этом, если предположить, что $a \geqslant b$ для определенности, то легко подсчитать, что $b \leqslant OP_1 = OP_2 \leqslant a$. Наиболее удаленная точка эллипса от центра есть точка A_1 (или A_2), а наименее удаленной является точка B_1 (или B_2).

Касательная к эллипсу. Оптические свойства эллипса. Из школы известно, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 задается уравнением $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем уравнение касательной к эллипсу L, заданному уравнением (2) в точке $M_0(x_0, y_0) \in L$. Для этого перепишем (2) в виде $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Уравнение со знаком плюс задает верхнюю часть эллипса L_+, а со знаком минус - нижнюю L_-. Допустим, что $M_0 \in L_+$. Находим производную $y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(x \neq \pm a)$. Из уравнения L_+: $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ay}{b}$, поэтому $y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$, $y \neq 0$. Следовательно, угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке M_0 есть $k = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$, а уравнение касательной $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$. Здесь $y_0 \neq 0$, то есть точка M_0 не совпадает с концом большой оси эллипса. Умножим обе части последнего уравнения на y_0 и поделим на b_2 : $\frac{yy_0}{b^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} - \frac{{x_0}^2}{a^2}$, а так как $M_0 \in L$, то $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ и последнее уравнение примет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{3}$$

Уравнение (3) и есть уравнение касательной к эллипсу в верхней его части. При $y_0 = 0$ получим из уравнения (2): $x_0 = \pm a$ и уравнение (3) примет вид: $x = \pm a$. Это уравнение двух прямых, проходящих через вершины эллипса A_1, A_2, параллельно оси OY. Такие прямые пересекают эллипс в одной точке, при этом эллипс лежит в полуплоскости ограниченной каждой прямой. Следовательно, эти прямые есть касательные к эллипсу. Поэтому в уравнении (3) можно снять ограничение $y_0 \neq 0$, установленное ранее. Предыдущий вывод с незначительными изменениями показывает, что уравнение (3) есть уравнение касательной к нижней части эллипса.

Оптическое свойство эллипса: луч света, выпущенный из одного фокуса эллипса, отразившись от эллипса, пройдет через другой фокус. Считается при этом, что отражение идет по законам оптики и в малом, эллипс и касательная к эллипсу в окрестности точки касания сливаются так, что под отражением от эллипса понимаем отражение луча от касательной в точке касания. Другими словами, надо доказать,



что фокальные радиусы точки M эллипса образуют с касательной l в M равные углы. ■ Обозначим их α и β. Найдем $d_1 = \rho(F_1, l)$. Так как $F_1(c, 0)$, а уравнение касательной есть уравнение (3), то по формуле расстояния от точки до прямой можно записать, что $d_1 = \frac{1}{N}|\frac{cx_0}{a^2} - 1|$, где $N = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$ или $d_1 = \frac{1}{Na} r_1$, так как $r_1 = |\frac{c}{a}x_0 - a|$ - это фокальный радиус точки M. Аналогично, $d_2 = \rho(F_2, l) = \frac{1}{Na} r_2$, r_2 - фокальный радиус точки M. Из прямоугольных треугольников $\triangle F_2PM$ и $\triangle MQF_1$ получим $\sin\alpha = \frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{Na} = \frac{d_2}{r_2} = \sin\beta$, а так как $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то отсюда следует равенство $\alpha = \beta$. ■

3.2 Гипербола

Гипербола - это множество всех точек плоскости у которых модуль разности расстояний до двух заданных точек той же плоскости фиксирован.

Обозначения: данные точки F_1, F_2 называются **фокусами** гиперболы, расстояние F_1F_2 - **фокальным расстоянием** и обозначается $2c$: $F_1F_2 = 2c$, $r_1 = MF_1$, $r_2 = MF_2$ - **фокальные радиусы** точки M плоскости. Если M принадлежит гиперболе, то найдется число $2a$, такое, что $|r_1 - r_2| = 2a$, для всех точек гиперболы. При этом, будем считать, что $a < c$. В противном случае гипербола выродится в отрезок или будет пустым множеством.

Уравнение гиперболы. Поместим центр декартовой системы координат в середину отрезка F_1F_2, а ось x-ов совместим с прямой (F_1F_2). Напишем уравнение гиперболы L с фокусами F_1, F_2 в этой декартовой системе координат. Пусть $M(x, y) \in L$. Найдем фокальные радиусы этой точки. Так как $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, то фокальные радиусы $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. По определению гиперболы $|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$. Перенесем один корень в правую часть, возведем, преобразовывая, дважды в квадрат обе части и, обозначив $b^2 = c^2 - a^2$, (1), получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Рассматривая (2) как уравнение, заключаем, что координаты x, y любой точки гиперболы удовлетворяют уравнению (2).

Покажем теперь, что для любого решения x, y уравнения (2) точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе L. Пусть x, y решения (2), тогда $y^2 = b^2(\frac{x^2}{a^2} - 1)$. Поэтому фокальный радиус $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + b^2(\frac{x^2}{a^2} - 1)} = \sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2} - 2xc + a^2} = \sqrt{(x\frac{c}{a} - a)^2} = |x\frac{c}{a} - a|$. Аналогично находим второй фокальный радиус $r_2 = |a + x\frac{c}{a}|$.

Из (2): $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$, или $x^2 \geqslant a^2$ или $x \leqslant -a$, $x \geqslant a$. (Отметим, что все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (2), лежат в полуплоскостях $x \leqslant -a$, $x \geqslant a$). Отсюда получаем, что для

$x \geqslant a$: $x\frac{c}{a} - a \geqslant a\frac{c}{a} - a = c - a > 0$, $x\frac{c}{a} + a \geqslant a\frac{c}{a} + a = c + a > 0$;
для $x \leqslant -a$: $x\frac{c}{a} - a \leqslant (-a)\frac{c}{a} - a = -c - a < 0$, $x\frac{c}{a} + a \leqslant (-a)\frac{c}{a} + a = -c + a < 0$,
Поэтому
$r_1 = -a + x\frac{c}{a}$, $r_2 = a + x\frac{c}{a}$ при $x \geqslant a$ и
$r_1 = a - x\frac{c}{a}$, $r_2 = -a - x\frac{c}{a}$ при $x \leqslant -a$.

Следовательно, $|r_1 - r_2| = 2a$ в обоих случаях, а, значит, точка $M(x, y) \in L$ по определению гиперболы. Таким образом, уравнение (2) есть уравнение гиперболы.

Уравнение (2) называется **каноническим** уравнением гиперболы, а система координат в которой гипербола имеет каноническое уравнение называется канонической.

Гипербола, заданная уравнением $x^2 - y^2 = a^2$, $(a = b$ в $(2))$, называется равнобочной гиперболой.

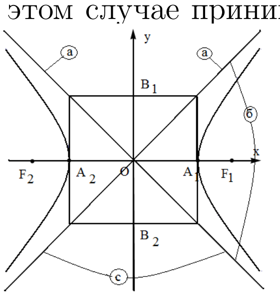
Гипербола (2) и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называются сопряженными гиперболами.

Исследование гиперболы L по его каноническому уравнению. 1). Точка $O(0,0) \notin L$. Найдем пересечение L и оси OX. Для этого решим систему: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$. и получим $x = \pm a$, $y = 0$. Поэтому $L \cap OX = \{A_1(a, 0), A_2(-a, 0)\}$. Рассмотрим пересечение $L \cap OY$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$. Видим, что эта система не имеет действительных решений (но есть мнимые решения !). Поэтому $L \cap OX = \emptyset$. Пусть $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются **вершинами** гиперболы. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются **действительной осью** гиперболы, отрезок a и его длина называются **действительной полуосью**. Отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называются **мнимой осью** гиперболы, а b - **мнимой полуось** гиперболы.

2). Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат.

3). Рассмотрим пересечение гиперболы с прямыми, проходящими через начало координат. Пусть $y = kx$ уравнение такой прямой. При таком задании прямых исключается из рассмотрения ось OY, но в п.1 выяснено строение $l \cap OY$. Запишем уравнение множество $l \cap L$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = kx$. Отсюда получим $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx)^2}{b^2} = 1$ или $x^2\delta = 1$ (3), где $\delta = \frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}$. Рассмотрим три случая: а) $\delta = 0$. Уравнение (3) в этом случае принимает вид $0 \cdot x^2 = 1$ и не имеет ни действительных, ни мнимых решений. Найдем прямые соответствующие этому случаю. Из равенства $\delta = 0$ получим: $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$ или $k = \pm\frac{b}{a}$. Таким образом, прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ не пересекают гиперболу. Эти прямые называются **асимптотами** гиперболы. Их легко построить. Построим сначала прямоугольник со сторонами параллельными осям координат и проходящим через вершины гиперболы. Стороны прямоугольника равны $2a$ и $2b$. Асимптоты гиперболы содержат диагонали этого прямоугольника.



б) $\delta > 0$. Уравнение (3) в этом случае имеет два решения $x = \pm\frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Следовательно, прямые этого случая пересекают гиперболу в двух точках $M_1(\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{k}{\sqrt{\delta}})$ и $M_1(-\frac{1}{\sqrt{\delta}}, -\frac{k}{\sqrt{\delta}})$ симметричных относительно начала координат. Найдем эти прямые. Из неравенства $\delta > 0$. получим $k^2 < \frac{b^2}{a^2}$ или $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$. Прямые l с такими угловыми коэффициентами лежат в вертикальных углах, образованных асимптотами и содержащих ось x-ов.

в) $\delta < 0$. Уравнение (3) не имеет действительных решений (но, есть мнимые). Угловые коэффициенты таких прямых удовлетворяют соотношению $\delta < 0$ или $k^2 > \frac{b^2}{a^2}$ то есть $-\frac{b}{a} > k$ и $k > \frac{b}{a}$. Все такие прямые расположены в углах, образованных асимптотами и содержащих ось y-ов.

Таким образом, гипербола расположена между асимптотами (случай б)) в полуплоскостях $x \geqslant a$, $x \leqslant -a$, как уже отмечалось. Следовательно, гипербола состоит из двух непересекающихся множеств - правой ветви и левой ветви гиперболы.

Отметим одно свойство асимптот. Рассмотрим часть гиперболы L и асимптоты

l, лежащие в первой координатной четверти. Пусть $M(x, y) \in L$. Из уравнения гиперболы выразим y через x: $M(x, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2})$. Найдем расстояние от M до асимптоты l: $y = \frac{b}{a}x$, $x \geqslant 0$:

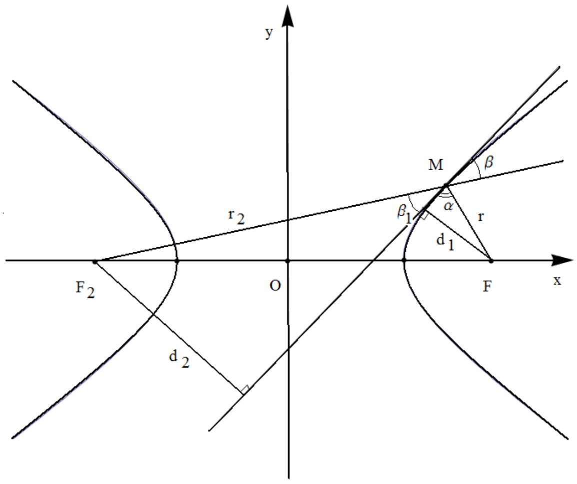
$$\rho(M, l) = \frac{|\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x|}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a}x)}.$$

Видим, что при $x \to \infty$ расстояние $\rho(M, l)$ монотонно стремится к нулю. Другими словами, ветвь гиперболы и асимптота неограниченно сближаются на бесконечности.

Оптические свойства гиперболы. По аналогии с случаем эллипса нетрудно написать уравнение касательной к гиперболе L, заданной уравнением (2) в точке $M(x_0, y_0) \in L$:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad (4).$$

Пусть из фокуса F_1 гиперболы выпустили луч света, он отразился от



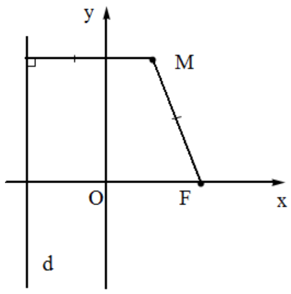
гиперболы в точке $M(x_0, y_0)$. Как поведет себя отраженный луч $[MK)$? Рассмотрим углы α и β, образованные касательной к гиперболе в точке $M(x_0, y_0)$ и фокальными радиусами точки $M(x_0, y_0)$. Покажем, что $\alpha = \beta$. Для этого найдем расстояние от фокуса F_1 до касательной, заданной уравнением (4): $d_1 = \rho(F_1, l) = \frac{1}{N}|\frac{cx_0}{a^2} - 1| = \frac{1}{Na}r_1$, где $N = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$. Аналогично, $d_2 = \rho(F_2, l) = \frac{1}{Na}r_2$. Отсюда получим: $\sin\alpha = \frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{Na} = \frac{d_2}{r_2} = \sin\beta$, поэтому $\alpha = \beta$.

Сейчас можно построить отраженный луч. Так как $\beta = \beta_1$ как вертикальные, а $\alpha = \beta$ по доказанному, то $\alpha = \beta_1$. Значит, отраженный луч MK принадлежит лучу F_2M, который легко построить.

3.3 Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости равноудаленных от данной прямой и данной точки.

Данная точка, обозначим ее F, называются **фокусом** параболы, прямая, обозначим ее d, - **директрисой** параболы, расстояние $\rho(F, d)$ - **параметром** параболы, обозначим его p. ■ Напишем уравнение параболы L в декартовой системы



координат, ось OX которой проходит через фокус, перпендикулярно директрисе, центр системы координат принадлежит параболе, а фокус лежит на положительной полуоси оси x-ов. Если $p = \rho(F, d)$, где F - фокус, d -директриса параболы, то $F(\frac{p}{2}, 0)$, а $x = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы. Точка $M(x, y) \in L$ тогда и только тогда, когда $MF = \rho(M, d)$. В координатах: $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|$ или

$$y^2 = 2px. \quad \blacksquare \tag{1}$$

Такое уравнение гиперболы называется **каноническим**. Система координат при этом называется **канонической системой координат**.

Если на рисунке повернем систему координат около точки O на 90° по часовой стрелке три раза, не двигая директрису и фокус параболы, то подобный вывод даст каждый раз такие уравнения параболы: $x^2 = 2py$, $y^2 = -2px$, $x^2 = -2py$. Их также называют каноническими уравнениями параболы.

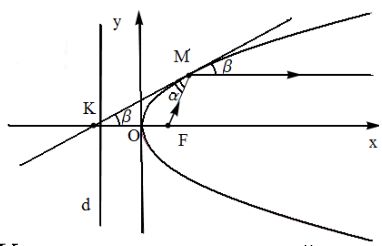
Исследование параболы по каноническому уравнению. 1). Точка $O(0, 0) \notin L$. Парабола пересекает оси координат только в точке $O(0, 0)$.

2). Парабола симметрична относительно оси OX так как $M(x, y) \in L \iff y^2 = 2px \iff (-y)^2 + 2px \iff M'(x, -y) \in L$. Парабола не симметрична относительно оси OY и точки O. Действительно, допусти, что для любой точки $M(x, y) \in L$ ей симметричная относительно OY точка $M'(-x, y) \in L$. Тогда становятся справедливыми два соотношения: $y^2 = 2px$ и $y^2 = -2px$. Отсюда получаем, что $x = -x$ или $x = 0$. Следовательно, для точки $M(x, y) \in L$ и такой, что $x \neq 0$, например $M(1, \sqrt{2p})$, ей симметричная $M'(-x, y)$ не лежит на L. Это значит, что парабола не симметрична относительно оси OY. Аналогично доказывается, что парабола не симметрична относительно начала координат.

3). Исследуем пересечение $l \cap L$, где $l : y = kx$ - прямая, проходящая через точку O. Множество $l \cap L$ задается системой $y^2 = 2px$, $y = kx$. Решая ее, получим $k^2x^2 = 2px$ или $x(k^2x - 2p) = 0$ (2). Таким образом, одна из точек множества $L \cap l$ имеет координаты $x = 0$, $y = 0$ - это точка O. Считаем, что $x \neq 0$. Тогда (2) будет эквивалентно уравнению $k^2x - 2p = 0$. Отсюда получаем: если $k = 0$, (при этом $l = OX : y = 0$), то прямая l не имеет с L других точек пересечения, кроме O, если $k \neq 0$, то $x = \frac{2p}{k^2}$, а $y = \frac{2p}{k}$ и $M(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k})$ - еще одна точка пересечения параболы с L.

Наконец, отметим, что из уравнения параболы (1) следует, что $x \geqslant 0$ и, значит, парабола L лежит в правой полуплоскости, ограниченной осью OY.

Уравнение касательной к параболе. Оптические свойства параболы. Напишем уравнение касательной l к параболе L, заданной уравнением (1), в точке $M(x_0, y_0) \in L$. $\blacksquare$ Перепишем (1): $y = \pm\sqrt{2px}$. Рассмотрим верхнюю часть параболы



L_+: $y = \sqrt{2px}$. Найдем производную: $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$. Поэтому угловой коэффициент касательной $k = \frac{p}{y_0}$, $y_0 \neq 0$, а $y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$ - уравнение касательной. Раскрывая скобки и учитывая, что $M \in L$, получим:

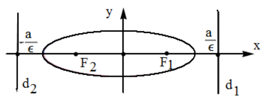
$$yy_0 = p(x + x_0).$$

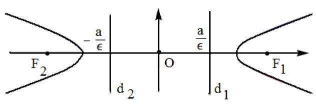
Касательная к нижней части параболы задается таким же уравнением. Ограничение $y \neq 0$ можно снять, так как при $y_0 = 0$, $x_0 = 0$ уравнение касательной примет вид $x = 0$, а это уравнение оси OY - касательной к параболе. $\blacksquare$

Покажем теперь, что луч света, выпущенный из фокуса параболы, отразившись от параболы пойдет параллельно оси OX. Надо показать, что для луча $MP||OX$ угол $\beta = \alpha$ (см. рисунок). ■ Если $MP||OX$, то $\beta = \angle MKF$. Поэтому достаточно узнать, будет ли $\triangle KFM$ - равнобедренным, а, значит, $\beta = \alpha$. Найдем точку K пересечения касательной и оси $0X$ из системы: $yy_0 = p(x-x_0), \quad y = 0$. Отсюда $K(-x_0, 0)$. Поэтому $KF = |x_0 + \frac{p}{2}|$, а $FM = \rho(M, d) = |x_0 + \frac{p}{2}|$. Следовательно $KF = FM$ и треугольник $\triangle KFM$ - равнобедренный.

3.4 Директориальные свойства кривых второго порядка

Пусть L - эллипс, гипербола или парабола, заданные каноническими уравнениями (2) §4.1, (2) §4.2, (1) §4.8 соответственно. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (эпсилон) называется **эксцентриситетом** эллипса или гиперболы. Для эллипса $\varepsilon < 1$, так как $c < a$, а для гиперболы $\varepsilon > 1$, так как для гиперболы $c > a$. Число $\varepsilon = 1$ назовем эсцентриситетом параболы. **Директрисами** эллипса (гиперболы) называются прямые, параллельные оси OY и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon.}$ Если кривая L задана





другими уравнениями, то это определение директрис неприемлемо. Уравнение директрис $d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon}$, $d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$. Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} > a$ и директрисы не пересекают эллипс. Для гиперболы $\varepsilon > 1$, поэтому $\frac{a}{\varepsilon} < a$ и директрисы гиперболы также не пересекают кривую. Будем называть фокус F_i и директрису d_i одноименными, $i = 1, 2$. У параболы одноименными фокусом и директрисой будем считать фокус и директрису параболы.

Теорема 3.1 *Эллипс (гипербола, парабола) есть множество всех точек плоскости, отношение расстояния от каждой из которых до фокуса к расстоянию до одноименной с этим фокусом директрисы есть величина постоянная, равная ε.*

Краткая формулировка теоремы: если L эллипс (гипербола, парабола), то

$$L = \{M| \frac{MF}{\rho(M,d)} = \varepsilon\},$$

где F, d одноименные фокус и директриса L, ε - эксцентриситет L.

■ Если L парабола, то утверждение теоремы совпадает с определением параболы. Пусть L гипербола или эллипс, d, F одноименные фокус и директриса, например, первые: $d = d_1, \quad F = F_1$.

а). Пусть $M(x,y) \in L$. Тогда $\rho(M, d_1) = |x - \frac{a}{\varepsilon}| = \frac{1}{\varepsilon}|\varepsilon x - a| = \frac{1}{\varepsilon}|\frac{c}{a}x - a| = \frac{1}{\varepsilon}r_1 = \frac{1}{\varepsilon}MF_1$. Поэтому $\frac{MF_1}{\rho(M,d_1)} = \varepsilon$.

б). Пусть $M(x,y)$ такая, что $\frac{MF_1}{\rho(M,d_1)} = \varepsilon$ (1) Покажем, что $M \in L$. Так как $F_1(c, 0)$, d_1: $x = \frac{a}{\varepsilon}$, то $MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $\rho(M, d_1) = |x - \frac{a}{\varepsilon}|$. Теперь равенство (1) можно записать так: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon|x - \frac{a}{\varepsilon}|$. Возводя в квадрат обе части равенства и, совершив преобразования, получим $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, где "+", если L - эллипс и "-", если L - гипербола. Таким образом, $M \in L$. ■

3.5 Классификация кривых второго порядка

Пусть кривая второго порядка L задана в некоторой правой декартовой системе координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ уравнением вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \tag{1}$$

Найдем систему координат R_0 в которой уравнение этой кривой L имело бы наиболее простой, канонический вид. Поиск такой канонической системы координат проведем в два шага.

1). Допустим, что в (1) $a_{12} \neq 0$. Если $a_{12} = 0$, то переходим сразу к пункту 2). Повернем систему координат R около начала координат на ориентированный угол α. Получим систему координат R'. Системы координат R и R' одинаково ориентированы. Возьмем формулы преобразования координат для таких систем координат (формулы 5 §3.2):

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{2}$$

Напишем уравнение L в системе координат R'. Для этого подставим x, y из (2) в (1) и, после преобразований, получим:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2c'_1x' + 2c'_2y' + c'_0 = 0, \tag{3}$$

где, например, $a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha$. Потребуем чтобы $a'_{12} = 0$, то есть $(a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha = 0$. Здесь $\cos\alpha \neq 0$, в противном случае $a_{12} = 0$. Поделим левую часть последнего уравнения на $\cos\alpha$:

$$a_{12}\tan^2\alpha - (a_{22} - a_{11})\tan\alpha - a_{12} = 0. \tag{4}$$

Уравнение имеет действительные решения, так как дискриминант этого уравнения $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 > 0$. Пусть α_0 - одно из решений. Тогда в системе координат R', полученной из R поворотом R на угол α_0, кривая L будет задана уравнением

$$c'_{11}x'^2 + c'_{22}y'^2 + 2c'_1x' + 2c'_2y' + c'_0 = 0. \tag{5}$$

Замечание. На практике сразу составляют уравнение (4) и находят $tg\alpha_0$ затем $\sin\alpha_0 = \frac{tg\alpha_0}{\sqrt{1+tg^2\alpha_0}}$, $\cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_0}}$ и записывают равенства (2). Подставляя x, y из (2) в (1), находят уравнение (5).

2). Теперь считаем, что уравнение кривой L в системе координат R такое:

$$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + 2c_1x + 2c_2y + c_0 = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим три случая: а). Пусть $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$ в (6). Выделяя полные квадраты, приведем уравнение (6) к виду

$$c_{11}(x + \frac{c_1}{c_{11}})^2 + c_{22}(y + \frac{c_2}{c_{22}})^2 + f_0 = 0, \quad \text{где } f_0 = c_0 - \frac{c_1^2}{c_{11}} - \frac{c_2^2}{c_{22}}. \tag{7}$$

Перенесем параллельно систему координат R в точку $O'(-\frac{c_1}{c_{11}}, -\frac{c_2}{c_{22}})$. Получим систему координат R_0. Запишем формулы преобразования координат (§3.2) для систем координат R и R_0: $x = x' - \frac{c_1}{c_{11}}$, $y = y' - \frac{c_2}{c_{22}}$. В новой системе координат, уравнение кривой имеет следующий вид.

$$c_{11}x'^2 + c_{22}y'^2 + f_0 = 0.$$

б). Пусть $c_{11} = 0$, $c_1 \neq 0$. Уравнение (6) примет вид $c_{22}y^2 + 2c_1x + 2c_2y + c_0 = 0$. Заметим, что $c_{22} \neq 0$ так как уравнение (6) есть уравнение второго порядка. Выделим полные квадраты:

$$c_{22}(y + \frac{c_2}{c_{22}})^2 + 2c_1(x + \frac{c_0}{2c_1} - \frac{c_2^2}{2c_{22}c_1}) = 0.$$

Перенесем параллельно систему координат R в точку $O'(-\frac{c_0}{2c_1} + \frac{c_2^2}{2c_{22}c_1}, -\frac{c_2}{c_{22}})$, получим систему координат R_0. Формулы преобразования координат для систем координат $x = x' - \frac{c_0}{2c_{22}} + \frac{c_2^2}{2c_{22}c_1}$, $y = y' - \frac{c_2}{c_{22}}$ позволяют записать L в R_0 :

$$c_{22}y'^2 + 2c_1x' = 0. \tag{8}$$

Случай $c_{22} = 0$, $c_2 \neq 0$ приводит к уравнению $c_{11}x'^2 + 2c_2y' = 0$.

в). Пусть $c_{11} = 0$, $c_1 = 0$. Уравнение (6) примет вид: $c_{22}y^2 + 2c_2y + c_0 = 0$. Выделим полный квадрат: $c_{22}(y + \frac{c_2}{c_{22}})^2 + c_0 - \frac{c_2^2}{c_{22}} = 0$. Перенесем R параллельно в точку $O'(0, -\frac{c_2}{c_{22}})$, получим систему координат R_0. Формулы преобразования координат для R и R_0: $x = x'$, $y = y' - \frac{c_2}{c_{22}}$, а уравнение L в R_0 :

$$c_{22}y'^2 + f_0 = 0,$$

где $f_0 = c_0 - \frac{c_2^2}{c_{22}}$.

Случай $c_{22} = c_2 = 0$ приводит к такому же виду уравнения.

Теорема 3.2 *Для любой кривой второго порядка существует декартова система координат в которой кривая задается одним из следующих трех уравнений: а)* $Ax^2 + By^2 + C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$; *б)* $Ax^2 + By = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$; *в)* $Ax^2 + C = 0$, $A \neq 0$.

Проведем классификацию кривых второго порядка на плоскости по уравнениям, приведенным в теореме 4.2.

а). Рассмотрим уравнение $Ax^2 + By^2 + C = 0$. Допустим, что $C \neq 0$. Тогда уравнение можно переписать так: $\frac{x^2}{-\frac{C}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{C}{B}} = 1$. Обозначим через $-\frac{C}{A} = \pm a^2$, $-\frac{C}{B} = \pm b^2$. Различных вариантов знаков - четыре. Два плюса дают уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Знаем, что кривая, заданная таким уравнением, является эллипсом. Знаки - плюс, минус (или минус, плюс) дают уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Последний вариант
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$
есть уравнение кривой с названием **мнимый эллипс**. На плоскости эта кривая не изображается.

Далее, считаем, что $C=0$. Тогда исходное уравнение можно переписать так: $\frac{x^2}{\frac{1}{A}}+\frac{y^2}{\frac{1}{B}}=1$. Введём обозначения: $\frac{1}{A}=\pm a^2$, $\frac{1}{B}=\pm b^2$. Перебирая варианты знаков, получим следующие уравнения. Знаки плюс, минус (или минус, плюс) дают уравнение
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$
Кривую, заданную таким уравнением, называют **пара пересекающихся прямых**. Знаки плюс, плюс (или минус, минус) дают уравнение
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$
Такая кривая называется **парой пересекающихся мнимых прямых**.

б). Рассмотри уравнение $Ax^2+By=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$. Перепишем его так:
$$x^2=2py,$$
где $p=-\frac{B}{2A}>0$. Это парабола. Случай $-\frac{B}{2A}<0$ также приводит к параболе.

в). Рассмотрим уравнение $Ax^2+C=0$. Если $C\neq 0$, то обозначив через $\frac{C}{A}=\pm a^2$, придем к следующим двум уравнениям:
$$\frac{x^2}{a^2}+1=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-1=0.$$
Первая кривая называется **пара мнимых параллельных прямых**, вторая **парой параллельных прямых**. Случай $C=0$ приводит к уравнению
$$x^2=0.$$
Эта кривая называется **парой совпавших прямых**.

Таким образом, на плоскости существует 9-ть видов кривых: эллипс, гипербола, парабола, мнимый эллипс, пара пересекающихся прямых, пара пересекающихся мнимых прямых, пара параллельных прямых, пара мнимых параллельных прямых и пара совпавших прямых.

Пример. В программе Mathematica 6 приведем к каноническому виду уравнение кривой (1) при

In[1]:= $\mathbf{a=-5;b=10;c=-10;d=-4;e=-5;f=-24;}$

Очистим переменную для повторного запуска команд.

In[2]:= $\mathbf{Clear}[\alpha]$;

Запишем уравнение (3), осуществив подстановку ("/.") вместо переменных x,y правые части формул (2), при этом штрихи писать не будем:

In[3]:= $\mathbf{q=(a\,x^2+2b\,x\,y+c\,x\,y+2d\,x+2e\,y+f)/.}$
$\mathbf{\{x->Cos}[\alpha]\,\mathbf{x-Sin}[\alpha]\,\mathbf{y,y->Sin}[\alpha]\,\mathbf{x+Cos}[\alpha]\,\mathbf{y\}}$

Получим следующий вид многочлена q:

Out[3]= $-24-10(y\mathrm{Cos}[\alpha]+x\mathrm{Sin}[\alpha])-10(y\mathrm{Cos}[\alpha]+x\mathrm{Sin}[\alpha])^2-8(x\mathrm{Cos}[\alpha]-y\mathrm{Sin}[\alpha])+20(y\mathrm{Cos}[\alpha]+x\mathrm{Sin}[\alpha])(x\mathrm{Cos}[\alpha]-y\mathrm{Sin}[\alpha])-5(x\mathrm{Cos}[\alpha]-y\mathrm{Sin}[\alpha])^2$

Возьмем в этом уравнении коэффициент при произведении разных координат (x y) и приравняем его к нулю. Такой коэффициент равен половине второй смешанной производной многочлена q по переменным x,y:

In[4]:= $\mathbf{eq = D[q, x, y] == 0}$

Получим следующее уравнение:

Out[4]= $20\mathrm{Cos}[\alpha]^2-10\mathrm{Cos}[\alpha]\mathrm{Sin}[\alpha]-20\mathrm{Sin}[\alpha]^2==0$

Данное уравнение можно решить вручную или воспользоваться следующей командой, позволяющей численно решать уравнения.

In[5]:= $\mathbf{er = FindRoot[eq, \{\alpha, Pi\}];}$

Out[5]= $\{\alpha \to 5.3753\}$

Присвоим переменной α найденное решение:

In[6]:= $\alpha=\alpha/.\mathbf{er};$

Out[6]= 5.3753

Теперь напишем уравнение кривой (4), в которое будет автоматически подставлено значения угла.

In[7]:= **Print["Уравнение кривой : ",**
(q//FullSimplify//Chop//Expand)," = 0"];

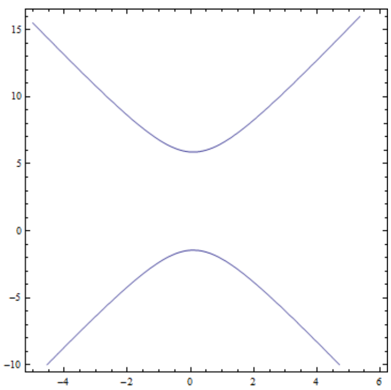
Out[7]= Уравнение кривой:
$-24.+2.95876x-17.8078x^2-12.4598y+2.80776y^2$

Уравнение не содержит произведения разных координат. Выделяя полные квадраты, приводим данное уравнение к каноническому виду:

$$-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{0.083075})^2}{\mathbf{2.1176}}+\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{2.2188})^2}{\mathbf{13.427}}=\mathbf{1}$$

Это гипербола с мнимой осью OY. Построим кривую[1].

In[8]:= $\mathbf{ContourPlot[q == 0, \{x, -5, 6\}, \{y, -10, 16\}]}$



[1]В программе Mathematica 5 использовать команду ImplicitPlot.

4 Преобразования плоскости

В этой части рассматриваются основные линейные преобразования плоскости - аффинные преобразования. Рассматриваются частные случаи аффинных преобразований - движения плоскости и подобия. Приводится классификация движений плоскости.

4.1 Определение преобразования. Примеры

Преобразованием множества называется называется **биективное** отображение множества на себя.

Лемма 4.1 *Отображение f плоскости на себя, заданное в некоторой системе координат формулами*

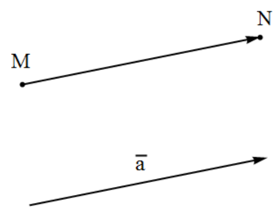
$$\begin{array}{l} x' = ax + by + c, \\ y' = a_1x + b_1y + c_1, \end{array} \quad \textit{при условии, что} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

является преобразованием плоскости.

■ Действительно, при заданных x', y' данные уравнения образуют систему двух уравнений относительно $x, y : ax+by+(c-x') = 0, \quad a_1x+b_1y+(c_1-y') = 0$. Коэффициенты при x, y не пропорциональны, следовательно, такая система имеет единственное решение x, y (см. замечание в конце §3.5). Таким образом, для данной точки $A'(x', y')$ найдется точка $A(x, y)$ такая, что $A' = f(A)$, следовательно, f - сюръективно, а так как такая точка единственна, то f - инъективно. ■

Тождественное отображение I плоскости на себя очевидно будет преобразованием. Рассмотрим еще примеры преобразования плоскости.

Параллельный перенос. Отображение $P_{\overline{a}} : E \to E$ называется параллельным переносом на вектор $\overline{a}$, если образом точки $M \in E$ будет точка $M' \in E$ такая, что $\overline{MM'} = \overline{a}$. Если $\overline{a} = \overline{0}$, то $P_{\overline{a}} = I$. Пусть $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ аффинная система координат, $M' = P_{\overline{a}}(M)$, $M(x, y)$, $M'(x', y')$. Пусть вектор $\overline{a} = (x_0, y_0)$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$. Так как $\overline{MM'} = \overline{a}$. то, учитывая, что $\overline{MM'} = (x' - x, y' - y)$, получим $x' - x = x_0$, $y' - y = y_0$ или

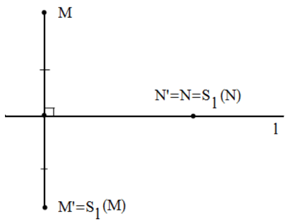


$$x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0, \tag*{(1).}$$

Эти формулы позволяют найти координаты образа через координаты прообраза. Следовательно, формулы (1) задают параллельный перенос аналитически. Верно и обратное утверждение: пусть отображение f плоскости на себя задано формулами (1). Тогда f есть параллельный перенос на вектор $\overline{a} = (x_0, y_0)$. ■ Действительно, пусть $\overline{a} = (x_0, y_0)$, где x_0, y_0 взяты в (1). Напишем формулы параллельного переноса $P_{\overline{a}}$, получим, конечно, формулы (1). Поэтому $f = P_{\overline{a}}$. ■

Лемма 5.1 показывает, что отображение, заданное формулами (1), то есть параллельны перенос, есть преобразование плоскости. Доказать, что $P_{\overline{a}}$ преобразование можно и непосредственно, пользуясь только определением параллельного переноса.

Осевая симметрия. Пусть задана прямая l. Определим отображение $S_l : E \to E$



по правилу: $M' = S_l(M)$, если ортогональные проекции точек M и M' на l совпадают и середина отрезка MM' принадлежит l. Для $M \in l$ считаем, что $M' = M$. Пусть l есть ось OX декартовой системы координат R, $M' = S_l(M)$ и $M(x, y)$, $M'(x', y')$.

Тогда формулы

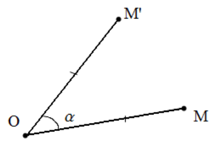
$$x' = x, \quad y' = -y \tag{2}$$

задают аналитически S_l. С другой стороны, формулы такого типа задают осевую симметрию с осью OX. Из (2) и леммы 5.1 следует, что осевая симметрия есть преобразование плоскости.

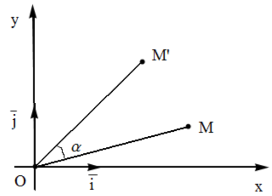
Вращение плоскости. Пусть даны точка O и число $\alpha \in [-\pi, \pi]$. **Вращением** (или **поворотом**) плоскости около точки O на угол α называется отображение V_0^α: $E \to E$, заданное правилом: $M' = V_0^\alpha(M)$, если $OM = OM'$ и направленный угол $\measuredangle(\overline{OM}, \overline{OM'}) = \alpha$. (Иногда говорят так: отрезок $[OM']$ получается из $[OM]$ поворотом $[OM]$ на угол α против часовой стрелки, если $\alpha > 0$ и на угол $-\alpha$ по часовой стрелки, если $\alpha < 0$).

Напишем формулы поворота V_0^α в правой декартовой системе координат $R = (O, \bar{\imath}, \bar{\jmath})$.

■ Пусть $M' = V_0^\alpha(M)$, $M(x, y)$, $M'(x', y')$ в системе координат $R = (O, \bar{\imath}, \bar{\jmath})$. Тогда по теореме 2.6 и следствию из теоремы 2.8 получим:



$x' = |\overline{OM'}| \cos \measuredangle(\bar{\imath}, \overline{OM'}) = |\overline{OM'}| \cos(\measuredangle(\bar{\imath}, \overline{OM}) + \measuredangle(\overline{OM}, \overline{OM'})) = |\overline{OM'}| \cos(\measuredangle(\bar{\imath}, \overline{OM}) + \alpha) = |\overline{OM'}|(\cos \measuredangle(\bar{\imath}, \overline{OM}) \cos \alpha - \sin \measuredangle(\bar{\imath}, \overline{OM}) \sin \alpha) = \cos \alpha(|\overline{OM}| \cos \measuredangle(\bar{\imath}, \overline{OM})) - \sin \alpha(|\overline{OM}| \sin \measuredangle(\bar{\imath}, \overline{OM})) = x \cos \alpha - y \sin \alpha$.

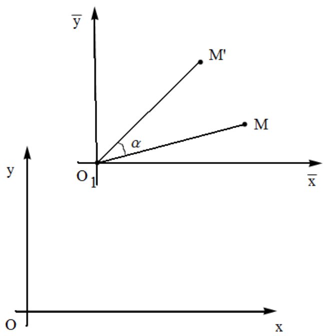


Аналогично показывается, что $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$.

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

По этим формулам можно найти координаты x', y' образа точки $M(x, y)$ в системе координат R.



Напишем теперь формулы, задающие поворот $V_{0_1}^\alpha$, где $O_1(x_0, y_0)$ в правой декартовой системе координат $R = (O, \bar{\imath}, \bar{\jmath})$.

■ Пусть $M' = V_{0_1}^\alpha(M)$, $M(x, y)$, $M'(x', y')$ в R. Перенесем R параллельно в точку O_1. Получим систему координат R'. Пусть $M(\tilde{x}, \tilde{y})$, $M'(\tilde{x}', \tilde{y}')$, в R'. Тогда эти координаты связаны равенствами (3):

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= \tilde{x} \cos \alpha - \tilde{y} \sin \alpha, \\ \tilde{y}' &= \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{y} \cos \alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Применяя формулам (4) §3.2, запишем соотношения между координатами точек M и M' в системах координат R и R': $x' = \tilde{x}' + x_0$, $y' = \tilde{y}' + y_0$, $x = \tilde{x} + x_0$, $y = \tilde{y} + y_0$.

Выразим отсюда $\tilde{x}', \tilde{y}'$ $\tilde{x}, \tilde{y}$ и подставим в (4):

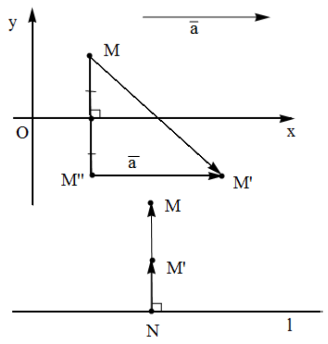
$$\begin{aligned} x' - x_0 &= (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha, \\ y' - y_0 &= (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

Формулы (5) решают поставленную задачу.

Обратно: отображение плоскости, заданное формулами вида (5) есть поворот плоскости на угол α с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$, где α, x_0, y_0 взяты из (5). Достаточно написать формулы поворота с центром в O_1 и на угол α, получим, очевидно, формулы (5). ■

Из леммы 5.1 и (5) следует, что поворот есть преобразование.

Скользящая симметрия - это композиция $P_{\overline{a}} \circ S_l$ осевой симметрии S_l с осью симметрии l и параллельного переноса $P_{\overline{a}}$, такого, что $\overline{a}||l$.



Композиция преобразований есть преобразование, следовательно скользящая симметрия есть преобразование плоскости.

Пусть R декартова система координат, l есть ось OX, $\overline{a}(x_0, 0)||l$. Пусть $M' = (P_{\overline{a}} \circ S_l)(M)$, $M(x, y)$, $M'(x', y')$ в R. Пусть $M''(x'', y'') = S_l(M)$. Тогда $S_l : x'' = x$, $y'' = -y$, а $P_{\overline{a}} : x' = x'' + x_0$, $y' = y''$. Отсюда получим формулы

$$x' = x + x_0, \quad y' = -y,$$

задание скользящую симметрии $P_{\overline{a}} \circ S_l$ с осью $l = OX$ и вектором $\overline{a}(x_0, 0)$.

Сжатие к прямой l с коэффициентом сжатия $k \neq 0$ это отображение $f : E \to E$, заданное правилом $M' = f(M)$, если M и M' ортогонально проектируется в одну и ту же точку прямой l и $\overline{NM'} = k\overline{NM}$, где N - проекция M на l. Если $l = OX$, $M(x, y)$, $M'(x', y')$, то можно записать $x' - x_1 = k(x - x_1)$, $y' - y_1 = k(y - y_1)$, где $N(x_1, y_1) \in l$. Учитывая, что $x_1 = x = x'$, а $y_1 = 0$, окончательно, получаем аналитическое задание сжатия плоскости к прямой OX с коэффициентом k:

$$x' = x, \quad y' = ky. \tag{6}$$

Из леммы 5.1 следует, что сжатие к прямой есть преобразование плоскости.

В заключении найдем, например, образ окружности при сжатии (6). Из (6) найдем x, y, подставим в уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ и получим $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{(ka)^2} = 1$. Следовательно, окружность радиуса a при сжатии к прямой, проходящей через центр окружности, преобразуется в эллипс, большая ось которого равна диаметру окружности, а малая равна $2ka$.

4.2 Аффинные преобразования плоскости

Возьмем на плоскости две аффинные системы координат R и R' и зададим отображение плоскости на себя по следующему правилу: точке M с координатами x, y в системе координат R поставим в соответствие точку M' с теми же координатами x, y, но в системе координат R'. В силу единственности координат, такое отображение плоскости будет преобразованием. Оно называется **аффинным преобразованием плоскости**.

Будем говорить, что аффинное преобразование f задано парой аффинных систем координат (R, R').

Аналитическое задание аффинного преобразования. Пусть f аффинное преобразование, заданное парой аффинных систем координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ и $R' =$

$(O', \overline{e}'_1, \overline{e}'_2)$, причем известно, что

$$\overline{e}'_1 = c_{11}\overline{e}_1 + c_{12}\overline{e}_2,$$
$$\overline{e}'_2 = c_{21}\overline{e}_1 + c_{22}\overline{e}_2,$$

и $O'(x_0, y_0)$ в системе координат R. Пусть $M' = f(M)$, $M(x, y)$ и $M'(x', y')$ в системе координат R. Выразим x', y' через x, y.

■ Так как $M' = f(M)$, точка M имеет координаты (x, y) в R, то точка M' имеет те же координаты (x, y) в системе координат R'. Таким образом, $M'(x, y)$ в R и $M'(x', y')$ в R'. Применяя формулы (2) §3.2, запишем:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{21}y + x_0, \\ y' &= c_{12}x + c_{22}y + y_0, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Тем самым найдены формулы, по которым можно найти координаты (x', y') образа $M' = f(M)$ точки $M(x, y)$ в одной системе координат R. ■

Рассмотрим обратную задачу: покажем, что отображение f плоскости, заданное формулами (1) в системе координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ есть аффинное преобразование плоскости.

■ Кроме системы координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ рассмотрим систему координат $R' = (O', \overline{e}'_1, \overline{e}'_2)$, где координаты векторов $\overline{e}'_1 = (c_{11}, c_{12})$, $\overline{e}'_2 = (c_{21}, c_{22})$ и точки $O'(x_0, y_0)$ составлены из коэффициентов в (1). Напишем теперь формулы, задающие аффинное преобразование плоскости, определенное парой систем координат R и R'. Конечно получим формулы (1). Следовательно f - аффинное преобразование плоскости. ■

Все примеры §4.2 являются примерами аффинных преобразований. Для доказательства достаточно сравнить (1) с формулами аналитического задания преобразования.

Пример. 1). Написать формулы (1) для преобразования, заданного парой систем координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ и $R' = (O, \overline{e}_1, \lambda\overline{e}_2)$, $\lambda \neq 0$. Обозначим базисные векторы системы координат R' через $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2$, тогда $\overline{e}'_1 = \overline{e}_1$, $\overline{e}'_2 = \lambda\overline{e}_2$. Поэтому $c_{11} = 1$, $c_{12} = c_{21} = 0$, $c_{22} = \lambda$, а так как $O' = O$, то формулы (1) примут вид $x' = x$, $y' = \lambda y$. Это преобразование есть сжатие к прямой, оси OX.

2). Пусть аффинные преобразования f, g, h заданы парами систем координат (R, R_1), (R_1, R_2), (R_2, R') соответственно. Тогда $h \circ g \circ f$ аффинное преобразование, заданное парой систем координат (R, R').

Лемма 4.2 *Пусть аффинное преобразование f задано парой систем координат R, R'; $R_1 = (O, A, B)$ - аффинная система координат, $O' = f(O)$ $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.*

1). Точки O', A', B' не лежат на одной прямой и, следовательно, $R'_1 = (O', A', B')$ - аффинная система координат. Систему координат R_1 будем называть образом системы координат R и писать $R' = f(R)$.

2). Аффинное преобразование f можно задать парой систем координат R_1, R'_1 в смысле определения аффинного преобразования.

■ Докажем 1). Предположим противное, то есть, будем считать, что точки O', A', B' принадлежат прямой l. Пусть $Ax + By + C = 0$ уравнение этой прямой в системе координат R'. Если $O'(x_1, y_1), A'(x_2, y_2), B'(x_3, y_3)$ в системе координат R', то координаты этих точек удовлетворяют уравнению прямой l. Так как точки $O(x_1, y_1)$, $A(x_2, y_2)$,

$B(x_3, y_3)$ имеют те же координаты в системе координат R, то получаем, что координаты этих точек удовлетворяют уравнению прямой l, что означает, что эти точки принадлежат одной прямой, что невозможно, так как нам дано, что $R_1 = (O, A, B)$ - система координат.

Докажем 2). Пусть $R_1 = (O, A, B)$, $R_1' = (O', A', B')$. Так как $R_1' = f(R_1)$, то координаты точек O, A, B в системе координат R совпадают с соответствующими координатами точек O', A', B' в системе координат R'. Следовательно, векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ в базисе системы координат R имеют такие же координаты, как и векторы $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$ в базисе системы координат R'. Поэтому формулы преобразования координат от R к R_1 и от R' к R_1' совпадают. Аффинное преобразование f, задано парой систем координат R и R', то есть, если $M' = f(M)$ и $M(x, y)$ в R, то $M'(x, y)$ в R'. Запишем координаты точек M, M' в системах координат R_1 и R_1' соответственно. Так как формулы преобразования координат от R к R_1 и от R' к R_1' одинаковы, то у точки M в R_1 будут такие же координаты, что и у M' в R_1'. Поэтому аффинное преобразование, заданное парой систем координат R_1 и R_1', переводит точку M в точку M', а, значит, является отображением f. ■

Следствие. Так как формулы преобразования координат от R к R_1 и от R' к R_1' одинаковы, то системы координат R, R_1 и R', R_1' одновременно одинаково (или противоположно) ориентированы. ■ Допустим, что эти пары систем координат одновременно одинаково ориентированы $R\omega R_1$ и $R'\omega R_1'$. Случай, когда эти пары систем координат противоположно ориентированы не приведет к новому результату. Тогда, если $R\omega R'$, то из транзитивности отношения ω и следствия 1, теоремы 2.5 следует, что $R_1\omega R$, $R\omega R' \to R_1\omega R'$ и $R_1\omega R'$, $R'\omega R_1' \to R_1\omega R_1'$. Аналогично получаем, что $R\overline{\omega}R'$ влечет и $R_1\overline{\omega}R_1'$. Таким образом, если системы координат R и R' одинаково (противоположно) ориентированы, то и системы координат R_1 и R_1' одинаково (противоположно) ориентированы.

Свойства аффинного преобразования

1). Аффинное преобразование f переводит отрезок в отрезок, луч в луч, прямую в прямую, полуплоскость в полуплоскость.

Докажем утверждение для отрезка. Возьмем систему координат так, чтобы данный отрезок l был отложен от начала координат на положительной полуоси оси X-ов системы координат R. Пусть a - длина этого отрезка в масштабе системы координат R. По лемме 5.2, аффинное преобразование можно задать парой соответствующих систем координат R и $R' = f(R)$. Если $M(x, y) \in l$ (координаты в системы координат R), то $0 < x < a$, $y = 0$. По определению аффинного преобразования, соответствующие точки имеют одинаковые координаты в системах координат R и R'. Значит координаты (x,y) точки M' (образа M) в системе координат R' удовлетворяют таким же соотношениям, то есть точка M' лежит на отрезке l': $0 < x < a$, $y = 0$ оси X-ов системы координат R'. По этой же причине прообраз любой точки отрезка l' принадлежит отрезку l. Следовательно $l' = f(l)$.

Доказательства для луча и полуплоскости аналогичные. Провести их самостоятельно. Отметим только, что положительная полуось оси X-ов задается системой $y = 0, x > 0$, а верхняя полуплоскость неравенством $y > 0$.

2). Аффинное преобразование сохраняет простое отношение трех точек: если точки A, B, C принадлежат прямой, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ их образы относительно аффинного преобразования f, то $(A, B; C) = (A', B'; C')$. В частности, образ середины отрезка есть середина образа отрезка.

■ Если λ есть простое отношение трех точек A, B, C, то из задачи 2 §3.1 следует, что $x_c = \frac{x_a+\lambda x_b}{1+\lambda}$, $y_c = \frac{y_a+\lambda y_b}{1+\lambda}$. Отсюда, если $x_c \neq x_b$, то $\lambda = \frac{x_a-x_c}{x_c-x_b}$, если $y_c \neq y_b$, то $\lambda = \frac{y_a-y_c}{y_c-y_b}$. Если теперь f задано парой систем координат R, R', то соответствующие точки имеют одинаковые координаты в этих системах координат, следовательно $(A, B; C) = (A', B'; C')$. ■

Следствие. Найдем образ окружности при аффинном преобразовании f. Пусть γ окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ в декартовой системе координат R. По лемме 5.2 преобразование f можно задать парой систем координат R, $f(R)$ и аналитически в системе координат R формулами вида (1). Окружность γ находится в квадрате $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$. Так как при этих изменениях x, y :

$$|x'| = |c_{11}x + c_{21}y + x_0| \leqslant |c_{11}||x| + |c_{21}||y| + |x_0| = a',$$
$$|y'| = |c_{12}x + c_{22}y + y_0| \leqslant |c_{12}||x| + |c_{22}||y| + |y_0| = b',$$

то $\gamma' = f(\gamma)$ принадлежит прямоугольнику $|x'| \leqslant a'$, $|y'| \leqslant b'$. Кривая γ' второго порядка, имеет бесконечное множество действительных точек и ограничена. Классификация кривых второго порядка показывает, что γ' - эллипс.

Аффинная геометрия. Множество A всех аффинных преобразований плоскости есть группа относительно композиции преобразований. Пусть $f, g \in A$ и пусть f задано парой R, R_1. Тогда по лемме 5.2 преобразование g можно задать парой R_1, $R' = g(R_1)$. Отображение $g \circ f$ ставит в соответствие точке M с координатами x, y в R точку M' с теми же координатами x, y в R', следовательно, $g \circ f \in A$. Ясно, что если $f \in A$, то и $f^{-1} \in A$. Как известно из алгебры, A - группа, подгруппа группы всех преобразований плоскости.

Группа A называется **аффинной группой преобразований**. В 1872 году немецкий математик Ф.Клейн предложил определение геометрии, как геометрии группы преобразований (Эрлангенская программа): совокупность свойств фигур и величин, не меняющихся при преобразованиях данной группы A, называется геометрией группы A. В соответствии с этим определением, назовем аффинной геометрией на плоскости геометрию группы аффинных преобразований плоскости, то есть совокупность свойств фигур и величин не меняющихся при аффинных преобразованиях плоскости.

4.3 Движения плоскости. Аналитическое задание движения

Движением плоскости называется аффинное преобразование, заданное парой декартовых систем координат.

Так как в декартовой системе координат расстояние между точками вычисляется по формуле $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, а движение ставит в соответствие точки с одинаковыми координатами в декартовых системах координат, то движение сохраняет расстояние между точками.

Аффинное преобразование можно задать любой парой систем координат, поэтому, везде далее будем считать, что движение f задано парой декартовых систем (R, R'), в которой первая система координат R является правой. Будем говорить, что движение есть движение первого рода, если системы координат R и R' одинаково ориентированы и движением второго рода, если системы координат R и R' противоположно ориентированы.

Аналитическое задание движения. Пусть движение f задано парой декартовых систем координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ и $R = (O', \bar{i'}, \bar{j'})$. Так как движение есть аффинное преобразование, то его можно задать формулами (1) §5.2. Эти формулы есть и формулы пересчета координат для двух систем координат $R = (O', \overline{i'}, \overline{j'})$ и $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$. В силу декартовости систем координат, формулы (1) §5.2 можно уточнить так же, как это было сделано в §3.2. Поэтому данное движение в правой системе координат R можно задать формулами вида:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - \varepsilon y \sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + \varepsilon y \cos\alpha + y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha = \measuredangle(\bar{i}, \bar{i}')$, $O'(x_0, y_0)$ в R, а $\varepsilon = +1$, если R и R' одинаково ориентированы и $\varepsilon = -1$, если R и R' противоположно ориентированы.

Верно и обратное утверждение - формулы вида (1) задают движение. Доказательство следует из ортогональности матрицы коэффициентов при переменных в (1) и следующей леммы.

Лемма 4.3 *Отображение f плоскости на себя, заданное в правой декартовой системе координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ формулами вида*

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + y_0, \end{aligned} \quad \text{где} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} - \tag{2}$$

ортогональная матрица, есть движение. Если $\det C > 0$, *то f - движение I рода, если* $\det C < 0$, *то f - движение II рода.*

■ Определитель ортогональной матрицы $\det(C) = \pm 1 \neq 0$, поэтому формулы (2) задают аффинное преобразование, которое можно задать системами координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ и $R = (O', \overline{i'}, \overline{j'})$, где $\overline{i'} = c_{11}\bar{i} + c_{21}\bar{j}$, $\overline{j'} = c_{12}\bar{i} + c_{22}\bar{j}$, а $O'(x_0, y_0)$. Из свойств ортогональной матрицы следует, что векторы $\{\overline{i'}, \overline{j'}\}$ образуют декартов базис. Следовательно аффинное преобразование f задано двумя декартовыми системами координат. Значит f - движение.

Если $\det(C) = 1$, то базисы (а, значит, и соответствующие системы координат) $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, $\{\overline{i'}, \overline{j'}\}$ - одинаково ориентированы и f есть движение I рода, а при $\det(C) = -1$ - эти базисы противоположно ориентированы и f есть движение II рода. ■

Свойства движения. Так как движение является и аффинным преобразованием, то оно обладает всеми свойствами аффинного преобразования. Основным свойством движения является то, что движение сохраняет расстояние между точками. Из него вытекает, что движение переводит отрезок в равный ему отрезок, угол в равный ему угол, треугольник в равный ему треугольник и так далее.

Примеры движения плоскости: параллельный перенос, поворот плоскости, осевая симметрия, скользящая симметрия. Для доказательства достаточно сравнить формулы, аналитически задающее каждое такое преобразование с формулами и условием (2) или с формулами (1). Так, например, поворот плоскости можно задать формулами (3) §5.1. Если в (1) положить $x_0 = y_0 = 0$, $\varepsilon = +1$, то получим совпадение формул, что и доказывает, что поворот плоскости есть движение.

Группа движений плоскости. Евклидова геометрия. Пусть D множество всех движений плоскости. Из определения движения следует, что, если $f, g \in D$, то $f \circ g \in D$ и $f^{-1} \in D$. Из алгебры известно, что D есть группа, подгруппа группы аффинных преобразований плоскости. Подгруппу D называют **группой движений плоскости**.

Следуя Ф.Клейну, можно дать такое определение: евклидовой геометрией на плоскости называется геометрия группы движений плоскости, то есть множество всех свойств фигур и величин, не меняющихся при движениях. К евклидовой геометрии, таким образом, относятся длина отрезка, свойство фигуры быть прямой или лучом, перпендикулярность прямых, а также следствия этих свойств.

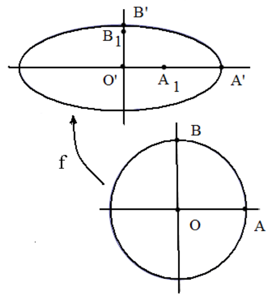
Теорема 4.1 *Пусть $f, g \in D$. Если f, g есть движения I (II) рода, то $f \circ g$ есть движение I рода. Если f, g есть движения разных родов, то $f \circ g$ есть движение II рода.*

■ Пусть движение g задано парой систем координат R и R_1, а движение f парой R_1, R'. Тогда композиция $f \circ g$ задается парой систем координат R, R'. Если f, g есть движения I рода, то есть $R\omega R_1$ и $R_1\omega R'$, из транзитивности отношения ω (теорема 2.5) следует, что $R\omega R'$ и, следовательно, композиция $f \circ g$ есть движение I рода. Если g есть движение I рода, а f - движение II рода, то есть $R\omega R_1$, и $R\overline{\omega}R'$, то из следствия теоремы 2.5 $R\overline{\omega}R'$ и, поэтому, $f \circ g$ есть движение II рода. Остальные случаи рассматриваются аналогично. ■

Следствие. Множество D_+ всех движений I рода есть группа.

Теорема 4.2 . *Аффинное преобразование плоскости есть композиция движения плоскости и двух сжатий к взаимно перпендикулярным прямым.*

■ Пусть f - аффинное преобразование, γ окружность радиуса 1. Тогда $\gamma' = f(\gamma)$ - эллипс. Пусть O' центр эллипса, A', B' концы разных осей симметрий эллипса. Пусть O, A, B прообразы точек O', A', B'. Так как O' - середина осей эллипса, то O центр окружности. Пусть C_1', C_2' точки эллипса симметричные относительно оси $O'A'$. Тогда



отрезок $C_1'C_2'$ параллелен $O'B'$. Прообразы C_1 и C_2 точек C_1', C_2' являются концами хорды окружности, параллельной диаметру OB и середина которой принадлежит диаметру OA. Поэтому $OA \perp OB$ и $R = (O, A, B)$ - декартова система координат. Так как $R' = f(R) = (O', A', B')$, то f можно задать парой систем координат $R = (O, A, B)$ и $R' = (O', A', B')$. Пусть точки A_1 и B_1 такие, что $\overline{O'A_1} \uparrow\uparrow \overline{O'A'}$, $\overline{O'B_1} \uparrow\uparrow \overline{O'B'}$ и $|\overline{O'A_1}| = |\overline{O'B_1}| = 1$. Пусть g движение, заданное парой декартовых систем координат R и $R_1 = (O', A_1, B_1)$. Пусть h_1 сжатие к прямой $(O'A')$, заданное парой систем координат $R_1 = (O', A_1, B_1)$ и $R_2 = (O', A_1, B')$, а h_2 - сжатие к прямой $(O'B')$, заданное парой систем координат $R_2 = (O', A_1, B')$, и $R' = (O', A', B')$. Тогда $f = h_2 \circ h_1 \circ g$. ■

4.4 Классификация движений плоскости

Проведем классификацию движений по множествам неподвижных точек движения. Напомним, что точка M называется **неподвижной** или **инвариантной** точкой преобразования f, если $f(M) = M$. Прямая l называется **неподвижной** или **инвариантной** прямой, если $f(l) = l$.

1). Рассмотрим сначала движения f I рода. Каждое движение I рода можно задать аналитически формулами (1) §5.3 при $\varepsilon = +1$:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0, \qquad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0. \tag{1}$$

Если в (1) $\alpha = 0$, то формулы, задающие движение f примут вид: $x' = x + x_0$, $y' = y + y_0$ и, следовательно, f есть параллельный перенос на вектор $\overline{a}(x_0, y_0)$ или тождественное преобразование, если $x_0 = y_0 = 0$.

Пусть $\alpha \neq 0$ в (1). Найдем инвариантные точки движения (1) в этом случае. Если $M(x, y)$ - инвариантная точка, то

$$x = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0, \qquad y = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0, \tag{2}$$

Рассмотрим эти равенства, как систему двух уравнений. Перепишем ее так:

$$x(-1+\cos\alpha) - y\sin\alpha + x_0 = 0, \qquad x\sin\alpha + y(-1+\cos\alpha) + y_0 = 0.$$

Коэффициенты при x, y в этой системе не пропорциональны, так как

$$\frac{-1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{-\sin\alpha}{-1+\cos\alpha} = \frac{(-1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}{\sin\alpha(-1+\cos\alpha)} = \frac{2(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha(-1+\cos\alpha)} \neq 0;$$

по предположению $\alpha \neq 0$. Следовательно система (2) имеет единственное решение:

$$a = a\cos\alpha - b\sin\alpha + x_0, \qquad b = a\sin\alpha + b\cos\alpha + y_0, \tag{3}$$

Из (1) и (3), вычитанием соответствующих частей равенств, получим

$$x' - a = (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha, \qquad y' - b = (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \tag{4}$$

Сравнивая эти формулы с формулами (5), §5.1, заключаем, что движение (4) есть поворот плоскости на угол α с центром в точке с координатами a, b.

Таким образом, движение I рода это либо параллельный перенос (нет инвариантных точек), либо тождественное преобразование плоскости (все точки инвариантные), либо поворот плоскости (одна точка инвариантная - центр поворота).

2). Рассмотрим теперь движение II рода. Любое движение II рода задается формулами (1) §5.3 при $\varepsilon = -1$:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0, \qquad y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0.$$

Составим систему для определения инвариантных точек движения:

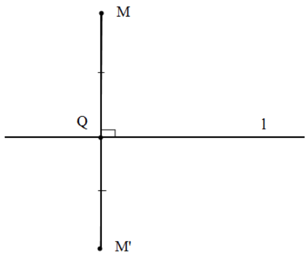
$$x(-1+\cos\alpha) + y\sin\alpha + x_0 = 0, \qquad x\sin\alpha - y(1+\cos\alpha) + y_0 = 0. \tag{5}$$

Коэффициенты при x, y в этих уравнениях пропорциональны, то есть

$$\frac{-1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{-(1+\cos\alpha)} = \frac{-1+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = 0.$$

Поэтому система (5) может не иметь решений или иметь бесконечное множество решений. Рассмотрим эти случаи:

а). Пусть $\frac{\sin\alpha}{-(1+\cos\alpha)} = \frac{x_0}{y_0}$. Тогда все коэффициенты уравнений (5) пропорциональны, поэтому уравнения этой системы равносильны. Система (5) имеет бесконечное множество решений, все такие решения являются координатами точек прямой l: $x\sin\alpha - y(1+\cos\alpha) + y_0 = 0$. Какой вид имеет движение f в этом случае? Если $M \in l$, то $f(M) = M$, так как все точки прямой l инвариантны. Пусть $M \notin l$, Q - ортогональная проекция M на l и $M' = f(M)$. Тогда $QM' \perp l$, так как $QM \perp l$ и движение сохраняет перпендикулярность прямых. Кроме того $QM = QM'$ и так как $M \notin l$, то $M \neq M'$. Поэтому M и M' симметричны относительно прямой l, а движение f



есть осевая симметрия с осью l.

б). Допустим теперь, что $\frac{\sin\alpha}{-(1+\cos\alpha)} \neq \frac{x_0}{y_0}$. Система (5) не имеет решений. Представим движение f в виде композиции двух движений: $x' = x'' + \lambda(1+\cos\alpha)$, $y' = y'' + \lambda\sin\alpha$ (6) и $x'' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0 - \lambda(1+\cos\alpha)$, $y'' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0 - \lambda\sin\alpha$ (7), где λ - произвольное число. Подберем λ так, чтобы $\frac{\sin\alpha}{-(1+\cos\alpha)} = \frac{x_0-\lambda(1+\cos\alpha)}{y_0-\lambda\sin\alpha}$. Для этого достаточно решить это уравнение относительно λ. Тогда преобразование (7) будет, по доказанному в а), осевой симметрией S_l с осью $l : x\sin\alpha - y(1+\cos\alpha) + y_0 - \lambda\sin\alpha = 0$, а преобразование (6) - параллельный перенос $P_{\overline{a}}$ на вектор $\overline{a}(\lambda(1+\cos\alpha), \lambda\sin\alpha)$. Так как $\overline{a}$ есть направляющий вектор l, то преобразование $P_{\overline{a}} \circ S_l$ есть скользящая симметрия.

Таким образом, движение второго рода есть либо осевая симметрия (прямая инвариантных точек), либо скользящая симметрия (нет инвариантных точек).

Замечание: исключенные случаи $\alpha \neq 0, \pi$, связанные с делением, рассмотренные аналогичным образом, не приводят к движениям, отличным от полученных.

4.5 Подобия плоскости

Определим сначала преобразование плоскости **гомотетию** с центром в точке O и коэффициентом гомотетии $k \neq 0$, как аффинное преобразование, заданное парой систем координат $R = (O, \overline{i}, \overline{j})$ и $R' = (O, k\overline{i}, k\overline{j})$. Первая система координат - правая и декартова, вторая - "почти декартова." Начало координат O является неподвижной точкой гомотетии.

Обозначим базисные векторы второй системы координат через $\overline{e}_1 = k\overline{i}$ и $\overline{e}_2 = k\overline{j}$ и по формулам (1) §5.2 запишем формулы, задающие гомотетию в системе координат R:

$$x' = kx.$$
$$y' = ky.$$

Отсюда следует, что для соответствующих по гомотетии точек $M'(x', y')$, $M(x, y)$, заданных в системе координат R, выполняется соотношение

$$\overline{OM'} = k\overline{OM}. \tag{1}$$

Это равенство часто принимают за определение гомотетии.

Так как гомотетия есть аффинное преобразование, то она обладает всеми свойствами аффинного преобразования. Укажем характерное свойство гомотетии. Из равенства (1) следует, что для любых точек M, N и их образов M', N' при гомотетии, $\overline{M'N'} = \overline{OM'} - \overline{ON'} = k\overline{OM} - k\overline{ON} = k\overline{MN}$. Отсюда следует основное свойство гомотетии. Длины соответствующих при гомотетии отрезков связаны соотношением:

$$M'N' = |k|MN. \tag{2}$$

Подобие плоскости - это аффинное преобразование плоскости, заданное системами координат $R = (O, \overline{i}, \overline{j})$ и $R' = (O', k\overline{i'}, k\overline{j'})$, где число $k \neq 0$. Модуль $|k|$ - называется коэффициентом подобия. Здесь система координат R - правая декартова, базис $\{\overline{i'}, \overline{j'}\}$ - декартов.

Гомотетия - частный случай подобия.

Пусть f - подобие заданное парой систем координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ и $R' = (O', k\bar{i'}, k\bar{j'})$. Обозначим через g - движение, заданное парой декартовых систем координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ и $R_1 = (O', \bar{i'}, \bar{j'})$, а через h - гомотетию, заданную парой систем координат $R_1 = (O', \bar{i'}, \bar{j'})$ и $R' = (O', k\bar{i'}, k\bar{j'})$. Тогда

$$f = h \circ g.$$

Таким образом, любое подобие есть композиция движения и гомотетии. Отсюда следует, что для подобия справедливо равенство (2), что и является основным свойством подобия. Ясно, что подобие обладает всеми свойствами аффинного преобразования. Из основного свойства подобия следует, что подобие переводит треугольник в подобный ему треугольник, угол в равный ему угол, в частности, перпендикулярные прямые преобразует в перпендикулярные прямые и так далее.

Аналитическое задание подобия. Пусть f подобие с коэффициентом k, заданное парой систем координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ и $R' = (O', k\bar{i'}, k\bar{j'})$. Обозначим через $\bar{e}_1 = k\bar{i'}$ и $\bar{e}_2 = k\bar{j'}$. Если $\alpha = \measuredangle(\bar{i}, \bar{i}')$, то по формулам $(1'')$ из §3.2, можно записать, что

$$\begin{aligned} \bar{i}' &= \cos\alpha\bar{i} + \sin\alpha\bar{j}, \\ \bar{j}' &= -\varepsilon\sin\alpha\bar{i} + \varepsilon\cos\alpha\bar{j}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = +1$, если базис $\{\bar{i'}, \bar{j'}\}$ - правый и $\varepsilon = -1$ в противном случае.

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= k(\cos\alpha\bar{i} + \sin\alpha\bar{j}); \\ \bar{e}_2 &= k(-\varepsilon\sin\alpha\bar{i} + \varepsilon\cos\alpha\bar{j}). \end{aligned}$$

Теперь по формулам (1) §5.2 можно записать аналитическое задание подобия в системе координат R:

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha) + x_0, \\ y' &= k(x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha) + y_0. \end{aligned}$$

Здесь $O'(x_0, y_0)$ в системе координат R.

Также как и лемма 5.3 доказывается

Лемма 4.4 *Отображение f плоскости на себя, заданное в декартовой системе координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j})$ формулами вида*

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + y_0, \end{aligned}$$

есть подобие с коэффициентом $|k| \neq 0$, если

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = k^2, \quad c_{21}^2 + c_{22}^2 = k^2, \quad c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} = 0.$$

Часть II
Аналитическая геометрия в пространстве

5 Векторы в пространстве

Определения вектора, коллинеарности векторов, равенства векторов, сложения векторов и умножения векторов на число, линейной зависимости векторов были рассмотрены в части I. Различия между случаями плоскости и пространства начинаются с момента введения базиса векторов, координат векторов, скалярного произведения векторов. В пространстве вводятся две новые операции над векторами, которые не имеют аналога в плоскости.

5.1 Базис. Координаты вектора

Вектор $\overline{AB}$ параллелен плоскости π, если прямая (AB) параллельна (или принадлежит) плоскости π; ноль-вектор считается параллельным любой плоскости. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$... называются **компланарными**, если они параллельны одной плоскости.

Лемма 5.1 *Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.*

■ Линейная зависимость компланарных векторов следует из следствие 2 теоремы 2.1. Докажем второе утверждение. Пусть векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ линейно-зависимы, то есть, существуют числа λ_1, λ_2 и λ_3, не равные нулю одновременно, такие, что $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c} = \overline{0}$. Предположим, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\overline{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{b} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\overline{c}$. Если теперь построим вектор $\overline{a}$ по полученной формуле, то увидим, что вектор $\overline{a}$ лежит в плоскости векторов $\overline{b}$, $\overline{c}$. Следовательно, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны. ■

Базисом векторов пространства называется упорядоченное множество трех линейно-независимых векторов.

Если векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ линейно независимы и взяты в порядке их записи: $\overline{e}_1$ - первый вектор, $\overline{e}_2$ - второй, $\overline{e}_3$ - третий, то у нас есть базис векторов пространства, который будем обозначать так: $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ (или так: B=$\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_2\}$); $\{\overline{e}_2, \overline{e}_1, \overline{e}_3\}$ - другой базис, так как порядок векторов выбран другой. Из леммы 6.1 следует, что векторы базиса не компланарны.

Базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, векторы которого имеют единичную длину $|\overline{i}| = 1$, $|\overline{j}| = 1$, $|\overline{k}| = 1$ и попарно перпендикулярны $\overline{i} \perp \overline{j}$, $\overline{i} \perp \overline{k}$, $\overline{j} \perp \overline{k}$, называется **декартовым** или **ортонормированным** базисом.

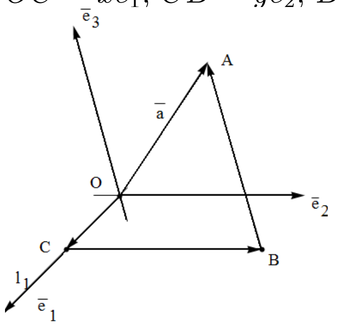
Теорема 5.1 . *Пусть $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ - базис. Для любого вектора $\overline{a}$ существует единственная упорядоченная тройка чисел x, y, z такая, что*

$$\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3.$$

■ Отложим от некоторой точки O векторы $\overline{a}$, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Пусть π - плоскость, проходящая через точку O параллельно векторам $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$. Пусть точка A такая, что $\overline{OA} = \overline{a}$.

Проведем через точку A прямую l параллельную вектору $\overline{e}_3$, а через точку O прямую l_1 параллельную вектору $\overline{e}_1$. Прямая l пересекает плоскость π в точке B. Пусть прямая, проходящая через точку B параллельно вектору $\overline{e}_2$ пересекает прямую l_1 в точке C.

Тогда $\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CB} + \overline{BA}$. По лемме 2.4 найдутся числа x, y, z такие, что $\overline{OC} = x\overline{e}_1$, $\overline{CB} = y\overline{e}_2$, $\overline{BA} = x\overline{e}_3$. Следовательно, $\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3$ и существование



таких чисел x, y, z доказано. Допустим теперь, что существует еще одно такое разложение вектора $\overline{a}$: $\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2 + z_1\overline{e}_3$. Приравнивая правые части, получим $x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3 = x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2 + z_1\overline{e}_3$, или $(x - x_1)\overline{e}_1 + (y - y_1)\overline{e}_2 + (z - z_1)\overline{e}_3 = \overline{0}$. Так как векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ линейно независимы, то последнее равенство возможно лишь при $x - x_1 = 0, y - y_1 = 0, z - z_1 = 0$, что и доказывает единственность. ■

Пусть $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ - базис. Числа x, y, z такие, что $\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3$, называются **координатами** вектора $\overline{a}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. Обозначение координат: $\overline{a}(x, y, z)$, $\overline{a} = (x, y, z)$ или (x, y, z).

Существование координат устанавливается теоремой 6.1. Отметим, что координаты вектора в данном базисе определяются единственным образом: если $\overline{a}(x, y, z) = \overline{b}(x_1, y_1, z_1)$, то $x = x_1, y = y_1, z = z_1$.

Примеры. 1). Пусть $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ - базис, векторы $\overline{a}, \overline{e}_1, \overline{e}_2$ компланарны - параллельны плоскости π. Так как $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ - базис векторов плоскости π, то можно записать, что $\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2$ или $\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3$. В силу единственности координат $\overline{a} = (x, y, 0)$ в базисе B.

2). Пусть $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ - базис. Тогда $\overline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\overline{e}_3 = (0, 0, 1)$ в базисе B, так как $\overline{e}_1 = 1\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3$ и так далее. Нулевой вектор имеет координаты $(0, 0, 0)$, так как $\overline{0} = 0\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3$.

3). Любые четыре вектора в пространстве линейно-зависимы (см. следствие 2 теоремы 2.1).

Теорема 5.2 . *Пусть векторы* $\overline{a}_i = (x_i, y_i, z_i)$ *в базисе* $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, α, α_i - *произвольные числа,* $i = 1, 2, ..., n$. *Если* $\overline{p} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$, *то* $\overline{p} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_n z_n)$.

В частности, $\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$, $\alpha\overline{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$.

■ Доказательство аналогично теореме 2.2 ■

Найдем теперь условия коллинеарности векторов в координатах.

Теорема 5.3 *Векторы* $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ *и* $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$ *параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть существует число* λ *такое, что* $x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2$, $z_1 = \lambda z_2$ *или* $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1$, $z_1 = \lambda z_2$ *(1).*

■ 1). Пусть $\overline{a}||\overline{b}$. Если $\overline{b}$ есть ноль-вектор, то условия (1) выполняются: $0 = 0x_1$, $0 = 0y_1$, $0 = 0z_1$. Считаем далее, что $\overline{b} \neq \overline{0}$. Существует число λ такое, что $\overline{a} = \lambda\overline{b}$, а из теоремы 6.2: $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$, $z_1 = \lambda z_2$.

2). Пусть теперь выполняются равенства (1), например, первые три. Домножим первое равенство (1) на $\overline{e}_1$, второе - на $\overline{e}_2$, третье - на $\overline{e}_3$ и сложим полученные равенства по частям: $x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2 + z_1\overline{e}_3 = (\lambda x_2)\overline{e}_1 + (\lambda y_2)\overline{e}_2 + (\lambda z_2)\overline{e}_3$ или $\overline{a} = \lambda\overline{b}$. Отсюда и из определения произведения вектора на число следует, что $\overline{a}||\overline{b}$. ■

Первые три условия (1) в случае, когда $x_2 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ можно переписать так:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Теорема 5.4 *Векторы $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$ и $\overline{c}(x_3, y_3, z_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

(см. Приложение).

■ 1). Пусть векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны. Из леммы 6.1 следует, что эти векторы линейно зависимы: существуют числа λ_1, λ_2 и λ_3, не равные нулю одновременно, такие, что $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c} = \overline{0}$. Отсюда и из теоремы 6.2 получим:

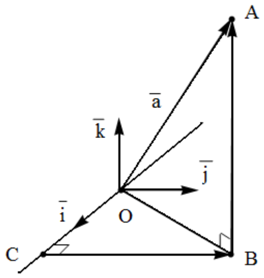
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0. \qquad (3)$$

Посмотрим на эти соотношения, как на систему трех уравнений относительно неизвестных λ_1, λ_2, и λ_3. Эта система однородная и по предположению существования λ_1, λ_2, и λ_3 имеет ненулевое решение, а это возможно лишь при выполнении условия (2).

2). Пусть для данных векторов выполняется условие (2). Составим систему (3). В силу (2) система (3) имеет ненулевое решение. Домножим левую и правую части первого равенства (3) (в котором λ_1, λ_2, и λ_3 и есть ненулевое решение) на вектор $\overline{e}_1$, второго равенства (3) - на $\overline{e}_2$, третьего - на $\overline{e}_3$, полученные равенства почленно сложим и получим: $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c} = \overline{0}$. Следовательно, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ линейно зависимые, а из леммы 6.1 следует, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - компланарны. ■

Теорема 5.5 . *Пусть $\overline{a} = (x, y, z)$ в декартовом базисе $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Тогда*

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



■ Отложим от некоторой точки O векторы $\overline{a}$, $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Пусть точки A, B, C такие же как в теорему 6.1: $\overline{OC} = x\overline{i}$, $\overline{CB} = y\overline{j}$, $\overline{BA} = z\overline{k}$, $\overline{OA} = \overline{a}$. Тогда $|\overline{OC}| = |x|$, $|\overline{CB}| = |y|$, $|\overline{BA}| = |z|$. По теореме Пифагора $|\overline{a}| = \sqrt{BA^2 + OB^2} = \sqrt{BA^2 + (OC^2 + CB^2)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. ■

Скалярным произведением векторов $\overline{a} = (x, y, z)$ и $\overline{b} = (x_1, y_1, z_1)$, заданных в некотором декартовом базисе $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, называется число $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + z \cdot z_1$. Обозначается скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$. Таким образом,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + z \cdot z_1.$$

Свойства скалярного произведения. Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и числа α: 1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$. 2) $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$. 3) $(\alpha\overline{a}) \cdot \overline{b} = \alpha(\overline{a} \cdot \overline{b})$. 4) $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$.

Доказательство первых трех свойств проводится непосредственным вычислением левых и правых частей равенств в координатах, свойство 4) вытекает из теоремы 6.5.

Теорема 5.6 *Для ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ справедливо равенство*

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a},\overline{b}).$$

■ Так же, как и в случае плоскости, можно показать, что скалярное произведение не зависит от выбора декартова базиса, в котором оно рассматривается.

Возьмем тогда декартов базис $B = \{\overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}\}$ так, чтобы $\overline{i'} \uparrow\uparrow \overline{a}$ и векторы $\overline{i'}, \overline{j'}, \overline{a}, \overline{b}$ были компланарны. Тогда, по теореме 2.6, учитывая четность функции cos, можно записать, что $\overline{a} = (|\overline{a}|, 0)$, $\overline{b} = (|\overline{b}|\cos\angle(\overline{a},\overline{b}), y)$ в базисе $\{\overline{i'}, \overline{j'}\}$. Поэтому $\overline{a} = (|\overline{a}|, 0, 0)$, $\overline{b} = (|\overline{b}|\cos\angle(\overline{a},\overline{b}), y, 0)$ в базисе B. По определению скалярного произведения получим: $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a},\overline{b})$. ■

Следствия. Зная координаты векторов, можно вычислить угол между векторами: $\cos\angle(\overline{a},\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$. Отсюда

$$\cos\angle(\overline{a},\overline{b}) = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}}.$$

В частности, $\overline{a} \perp \overline{b} \iff xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0$.

5.2 Ориентация пространства

Рассмотрим два базиса пространства $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ и $B' = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$. Пусть

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= c_{11}\overline{e}_1 + c_{12}\overline{e}_2 + c_{13}\overline{e}_3,\\ \overline{e}'_2 &= c_{21}\overline{e}_1 + c_{22}\overline{e}_2 + c_{23}\overline{e}_3,\\ \overline{e}'_3 &= c_{31}\overline{e}_1 + c_{32}\overline{e}_2 + c_{33}\overline{e}_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

(см. Приложение), составленная из координат векторов базиса B' в базисе B, называется **матрицей перехода от базиса B к базису B'.** Так как базисные векторы $\overline{e}'_1$, $\overline{e}'_2$, $\overline{e}'_3$ не компланарны, то из теоремы 6.4 следует, что $\det C \neq 0$. Поэтому, либо $\det C > 0$, либо $\det C < 0$.

Базисы B и B' называются одинаково (противоположно) ориентированными, если определитель матрицы перехода от базиса B к базису B' положителен (отрицателен). Символ $B\omega B'$ означает, что базисы B и B' одинаково ориентированные, а $B\overline{\omega}B'$ - противоположно ориентированные.

Теорема 5.7 . *Отношение ω - одинаковой ориентированности на множестве всех базисов пространства есть отношение эквивалентности.*

■ Рассмотрим три произвольных базиса пространства B, B' и B''. Пусть C матрица перехода от базиса B к базису B', C_1 - матрица перехода от базиса B' к базису B'', C_2 - матрица перехода от базиса B к базису B''.

Так же, как и в случае плоскости, можно вывести равенство:

$$\det C_2 = \det C \cdot \det C_1. \tag{2}$$

Отсюда следует, что, если B и B', B' и B'' одинаково ориентированы, то есть $\det C > 0, \det C_1 > 0$, то $\det C_2 > 0$ и следовательно B и B'' одинаково ориентированы.

Возьмем вместо базиса B'' базис B. Тогда

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $\det C_2 = 1$. Из (2): $\det C \cdot \det C_1 = 1$. Поэтому, если B и B' одинаково ориентированы, то есть $\det C > 0$, то и $\det C_1 = 1/\det C > 0$ и, следовательно, базисы B и B' одинаково ориентированы. Таким образом, ω - симметрично. Очевидно, что выполняется и рефлексивность отношения ω. ■

Следствия. 1). Если $B\overline{\omega}B', B'\overline{\omega}B''$, то $B\omega B''$. 2). Если $B\overline{\omega}B', B'\omega B''$, то $B\overline{\omega}B''$. 3). Если $B\omega B', B'\overline{\omega}B''$, то $B\overline{\omega}B''$.

■ Доказательства следуют из равенства (2). ■

Так как два базиса пространства либо одинаково ориентированы, либо противоположно ориентированы, то отношение одинаковой ориентированности (=отношение эквивалентности) на множестве всех базисов пространства разбивает это множество на два класса эквивалентности. Два базиса принадлежат к одному классу эквивалентности, если они одинаково ориентированы, и к разным, если они ориентированы противоположно. Назовем базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, у которого векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ расположены, как большой, указательный и средний пальцы правой руки, **правым** базисом, остальные базисы назовем левыми. Класс эквивалентности, состоящий из правых базисов называется положительной ориентацией пространства.

Можно доказать, что одинаково ориентированные базисы можно перевести один в другой непрерывным изменением углов между векторами и длин самих векторов так, что в каждый момент деформации эти векторы были бы не компланарны.

Ориентация плоскости в пространстве. Пусть в пространстве введена ориентация базисов. Плоскость π в пространстве будем считать ориентированной, если выбран и зафиксирован какой-нибудь нормальный вектор $\overline{n}$ плоскости. Базис $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ плоскости π назовем правым (левым), если базис $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{n}\}$ - правый (левый) базис пространства. Будем говорить, что ориентация плоскости π порождена вектором $\overline{n}$.

Для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пространства теперь можно определить направленный угол. Возьмем произвольную плоскость, параллельную векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, введем на этой плоскости произвольную ориентацию, зафиксировав какой-нибудь нормальный вектор плоскости. Тогда множество базисов плоскости разбиваются на два подмножества - на правые и левые базисы. Теперь направленный угол определяем так же, как это было сделано в §2.5, его и назовем направленным углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Знак ориентированного угла зависит от выбора нормального вектора плоскости, то есть от ориентации плоскости.

Пример. Пусть $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ - правый декартов базис. Плоскость, параллельную векторам $\overline{j}, \overline{k}$, ориентируем вектором $\overline{i}$. Чему равен ориентированный угол $\measuredangle(\overline{j}, \overline{k})$? По определению §2.5, он равен $+90°$, если базис $\{\overline{j}, \overline{k}\}$ - правый и $-90°$ в противном случае. Проверим, правый ли базис $\{\overline{j}, \overline{k}\}$ в ориентации плоскости. Он будет правым, если $\{\overline{j}, \overline{k}, \overline{i}\}$ - есть правый базис пространства. Найдем определитель матрицы перехода от базиса B к базису $\{\overline{j}, \overline{k}, \overline{i}\}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

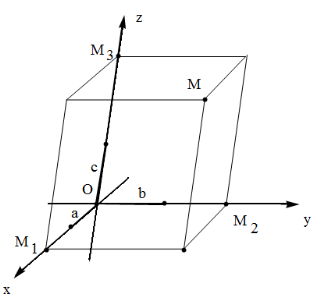
Так как B - правый базис, а определитель матрицы перехода от базиса B к базису $\{\overline{j}, \overline{k}, \overline{i}\}$ положителен, то базис $\{\overline{j}, \overline{k}, \overline{i}\}$ - правый. Следовательно $\measuredangle(\overline{j}, \overline{k}) = +90°$.

5.3 Аффинная система координат в пространстве

Возьмем некоторую точку пространства O и проведем через нее три прямые, не параллельные одной плоскости. Точка O делит каждую прямую на два луча с вершиной в точке O. Один из лучей каждой прямой отметим стрелкой. Выберем на каждой прямой единицы длины (масштабы), причем не обязательно равные. Упорядоченную тройку таких прямых назовем **аффинной системой координат** в пространстве. Точка O называется началом аффинной системы координат, прямые называются координатными осями, причем, первая прямая - осью OX, x- ов или абсцисс, вторая - осью OY, y-ов или ординат, третья - ось OZ или аппликат. Лучи, отмеченные стрелкой, - положительными полуосями, дополнительные к ним лучи - отрицательными полуосями. Плоскости, содержащие оси координат, называются координатными плоскостями.

Аффинная система координат, оси координат которой попарно перпендикулярны, а масштабные отрезками на осях координат все равны 1, называется декартовой или прямоугольной системой координат. Следовательно, аффинная система координат является обобщением декартовой, школьной системы координат.

Дадим определение координат точек пространства. Обозначим через a, b, c - единицы масштабов на осях OX, OY и OZ соответственно. Пусть M - произвольная точка пространства. Проведем через точку M плоскости, параллельно координатным плоскостям. Пусть эти плоскости пересекают оси координат OX, OY, и OZ в точках M_1, M_2, и M_3 соответственно. Пусть $x = +\frac{OM_1}{a}$, если M_1 лежит на положительной полуоси или $M_1 = O$ и $x = -\frac{OM_1}{a}$, если M_1 лежит на отрицательной полуоси оси OX. Другими словами, x - это расстояние с учетом знака от точки M_1 до O в масштабе оси OX. Аналогично, $y = \pm\frac{OM_2}{b}$, где "+", если точка M_2 лежит на положительной полуоси или $M_2 = O$ и "-", если M_2 лежит на отрицательной полуоси оси OY, $z = \pm\frac{OM_3}{c}$, где "+", если точка M_3 лежит на положительной полуоси или $M_3 = O$ и "-", если M_3 лежит на отрицательной полуоси оси OZ. Упорядоченную тройку чисел x, y, z называют **координатами** точки M в данной аффинной системе координат. Обозначение: $M(x, y, z)$.



Вектор $\overline{OM}$ называется **радиус-вектором** точки M. Точки M_i, $i = 1, 2, 3$, называются проекциями точки M на оси координат; в случае декартовой системы координат точки M_i будут и ортогональными проекциями точки M на оси координат. Если $M \in OX$, то $M(x, 0, 0)$, если $M \in OY$, то $M(0, y, 0)$, если $M \in OZ$, то $M(0, 0, z)$; $O(0, 0, 0)$. Отрезки $[OA]$, $[OB]$ и $[OC]$, где $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ лежат на положительных полуосях и являются единичными отрезками осей OX, OY и OZ соответственно.

Пример. Построить точку $M(2,3,1)$. Возьмем на осях координат точки $M_1(2,0,0)$ $M_2(0,3,0)$ и $M_3(0,0,1)$ и проведем через них плоскости параллельные координатным плоскостям. Пересечение таких плоскостей и будет точка M.

С каждой аффинной системой координат естественным образом связан базис векторов пространства. Векторы $\overline{e}_1 = \overline{OA}$, $\overline{e}_2 = \overline{OB}$ и $\overline{e}_3 = \overline{OC}$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, параллельны осям координат и поэтому не компланарны. Следовательно, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ - линейно независимы и поэтому образуют базис векторов пространства. Будем называть его базисом данной системы координат.

С другой стороны, совокупность точки O и базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ пространства определяет систему координат естественным образом: прямые, проходящие через точку O параллельно базисным векторам, будут осями координат, длины базисных векторов будут масштабными отрезками на осях координат, а направления базисных векторов определяют положительные полуоси. Поэтому систему координат можно обозначать и так: $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$.

Отметим, что аффинную систему координат можно задать, указав четыре точки O, A, B, C, не лежащие в одной плоскости: O - начало координат, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ - базисные векторы. Так заданную систему координат будем обозначать перечислением базисных точек: $R = (O, A, B, C)$.

Теорема 5.8 *Точка M имеет координаты x, y, z в аффинной системе координат $R = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ тогда и только тогда, когда x, y, z есть координаты радиус-вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ системы координат R.*

■ 1). Пусть точка M имеет координаты x, y, z в системе координат R. Пусть M_i, $(i = 1,2,3,)$ - проекции точки M на оси координат. Тогда $x = \pm\frac{OM_1}{OA}$, где "+", если точка M_1 лежит на луче $[OA)$, $A(1,0,0)$ или $\overline{OA} \uparrow\uparrow \overline{OM}_1$ и "-", если M_1 лежит на луче, дополнительном к $[OA)$ или $\overline{OA} \uparrow\downarrow \overline{OM}_1$. С другой стороны: $\overline{OM}_1 = \pm\frac{|\overline{OM}_1|}{|\overline{OA}|}\overline{OA}$, где "+", если $\overline{OA} \uparrow\uparrow \overline{OM}_1$ и "-", если $\overline{OA} \uparrow\downarrow \overline{OM}_1$. В обоих случаях $\pm\frac{|\overline{OM}_1|}{|\overline{OA}|} = x$, а $\overline{OM}_1 = x\overline{OA} = x\overline{e}_1$. Аналогично, $\overline{OM}_2 = y\overline{e}_2$ и $\overline{OM}_3 = z\overline{e}_3$. Отсюда получаем $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3 = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3$, следовательно, $\overline{OM} = (x, y, z)$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

2). Пусть радиус-вектор $\overline{OM}$ имеет координаты x, y, z в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, а точка $M(x_1, y_1, z_1)$ в системе координат R. По части первой доказательства теоремы $\overline{OM} = (x, y, z)$ в $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. В силу единственности координат векторов: $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. ■

Следствие. Так как координаты вектора в данном базисе определяются однозначно, то и координаты точки в данной аффинной системе координат определяются однозначно.

Теорема 6.8 позволяет дать более короткое определение координат точек: координатами точки M в системе координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ называют координаты радиус-вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

Задача 1. Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ в аффиной системе координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

■ По теореме 6.8 $\overline{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{OB} = (x_2, y_2, z_2)$. Так как $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, то из теоремы 6.2 получим:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Если система координат R - декартова, то теорема 6.5 позволяет вычислить модуль вектора или, что то же самое, длину отрезка AB (или расстояние между точками A и B):

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.■$$

Задача 2. Простое отношение трех точек прямой. Определение простого отношения трех точек было дано в §3.1.

Найдем координаты точки $M(x, y, z)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda \neq -1$; $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

■ По определению простого отношения $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$. Запишем это равенство в координатах: $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$. Отсюда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.■$$

В частности, если $M(x, y, z)$ - середина отрезка AB (простое отношение $\lambda = 1$), то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

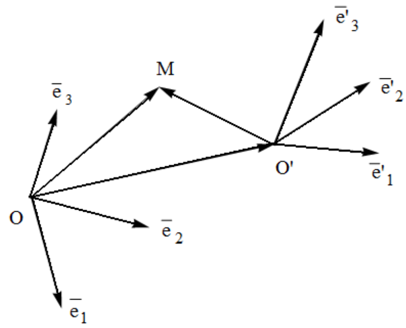
5.4 Преобразование аффинной системы координат

Пусть даны аффинные системы координат $R = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и $R' = (O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$, причем $O'(x_0, y_0, z_0)$ в системе координат R и

$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= c_{11}\bar{e}_1 + c_{12}\bar{e}_2 + c_{13}\bar{e}_3, \\ \bar{e}'_2 &= c_{21}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 + c_{23}\bar{e}_3, \\ \bar{e}'_3 &= c_{31}\bar{e}_1 + c_{32}\bar{e}_2 + c_{33}\bar{e}_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть точка M имеет координаты x, y, z в системе координат R и x', y', z' в системе координат R'. Выразим x, y, z через x', y', z', то есть найдем формулы пересчета координат для двух разных систем координат.

■ Для этого найдем координаты векторов $\overline{O'M}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Применяя равенства (1), получим $\overline{O'M} = x'\bar{e}'_1 + y'\bar{e}'_2 + z'\bar{e}'_3 = x'(c_{11}\bar{e}_1 + c_{12}\bar{e}_2 + c_{13}\bar{e}_3) + y'(c_{21}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 + c_{23}\bar{e}_3) + z'(c_{31}\bar{e}_1 + c_{32}\bar{e}_2 + c_{33}\bar{e}_3) = (c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z')\bar{e}_1 + (c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z')\bar{e}_3 + (c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z')\bar{e}_3$. По определению сложения векторов, $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$ или $x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 = x_0\bar{e}_1 + y_0\bar{e}_2 + z_0\bar{e}_3 + (c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z')\bar{e}_1 + (c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z')\bar{e}_2 + (c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z')\bar{e}_3$. Отсюда, в силу единственности координат вектора, получим искомые формулы преобразования координат:



$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' + x_0, \\ y &= c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z' + y_0, \\ z &= c_{13}x' + c_{23}y' + c_{33}z' + z_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что коэффициенты в этих формулах имеют следующий смысл: c_{11}, c_{12}, c_{13} - координаты вектора $\overline{e}'_1$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, c_{21}, c_{22}, c_{23} - координаты вектора $\overline{e}'_2$, c_{31}, c_{32}, c_{33} - координаты вектора $\overline{e}'_3$, x_0, y_0, z_0 - координаты точки O' в системе координат R.

Матрица

$$C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

называется **матрицей преобразования координат.** Сравнивая ее с матрицей C перехода от базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ к базису $\{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$, видим, что $\det C' = \det C \neq 0$.

Формулы (2) при условии, что $\det C \neq 0$, можно рассматривать, как формулы преобразования координат. При этом, первая система координат R может быть взята произвольно, вторая связана с R по формулам (1), где коэффициенты взяты из (2).

Две системы координат называются одинаково (противоположно) ориентированными, если их базисы одинаково (противоположно) ориентированы. Обозначение: $R\omega R'$- для одинаково ориентированных и $R\overline{\omega}R'$-для противоположно ориентированных систем координат. Система координат называется правой, если ее базис - правый и левой - в противном случае.

Декартовы системы координат. Если системы координат R и R' - декартовы, то коэффициенты в формулах (1), в силу единичности базисных векторов систем координат и их попарной ортогональности, удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{array}{ll} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = 1, & c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} = 0, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = 1, & c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{23}c_{33} = 0, \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 1, & c_{31}c_{11} + c_{32}c_{12} + c_{33}c_{13} = 0. \end{array}$$

Как известно, матрица (3), обладающая такими свойствами, называется ортогональной. Отсюда следует, что положение одной декартовой системы координат относительно другой (с тем же центром) определяется тремя независимыми параметрами, а остальные 6-ть можно найти из приведенных соотношений.

Л.Эйлер определил три угла, которые полностью определяют положение одной декартовой системы координат относительно другой системы координат (углы Эйлера). Формулы пересчета координат (2), содержащие углы Эйлера, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x = {} & (\cos u \cos v - \sin u \sin v \cos w)x' + \\ & \quad (-\sin v \cos u - \sin u \cos v \cos w)y' + (\sin u \sin w)z' + x_0, \\ y = {} & (\sin u \cos v + \cos u \sin v \cos w)x' + \\ & \quad (-\sin u \sin v + \cos u \cos v \cos w)y' - (\cos u \sin w)z' + y_0, \\ z = {} & (\sin v \sin w)x' + (\sin w \cos v)y' + \cos w z' + z_0 \end{aligned}$$

Примеры. 1). Напишем формулы преобразования координат для систем координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ и $R' = (O', \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, $O'(x_0, y_0, z_0)$. Будем говорить, что система координат R' получена из системы координат R переносом начала R в точку O.

■ Обозначим базисные векторы системы координат R' через $\overline{e'_i}$: $\overline{e'}_1 = \overline{e}_1$, $\overline{e'_2} = \overline{e}_2$, $\overline{e'_3} = \overline{e}_3$. Эти формулы получаются из (1) при $c_{ii} = 1$, $c_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Отсюда и из (2) находим:

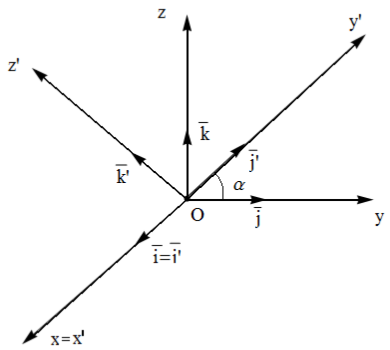
$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0, \\ z &= z' + z_0. \ ■ \end{aligned}$$

2). Напишем формулы пересчета координат для двух правых декартовых систем координат: $R = (O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ и $R' = (O, \overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'})$ таких, что $\overline{i'} = \overline{i}$. Будем говорить, что система координат R' получена из системы координат R поворотом R около оси OX на угол $\alpha = \measuredangle(\overline{i}, \overline{i'})$.

■ Ориентируем плоскость, содержащую векторы $\overline{j}$, $\overline{k}$, $\overline{j'}$, $\overline{k'}$, вектором $\overline{i}$. Тогда базисы $\{\overline{j}, \overline{k}\}$ и $\{\overline{j'}, \overline{k'}\}$ будут правыми в выбранной ориентации плоскости. Действительно, как было показано в примере §6.2, базис $\{\overline{j}, \overline{k}, \overline{i}\}$ $(\{\overline{j'}, \overline{k'}, \overline{i'}\})$ - правый, значит и базис $\{\overline{j}, \overline{k}\}$ $(\{\overline{j'}, \overline{k'}\})$ - правый.

Отсюда и из §3.2, формула $(1'')$, можно записать

$$\overline{i}' = \overline{i}, \quad \overline{j}' = \cos\alpha \overline{j} + \sin\alpha \overline{k}, \quad \overline{k}' = -\sin\alpha \overline{j} + \cos\alpha \overline{k}. \tag{4}$$



Если в равенствах (1) вместо векторов взять базисные векторы систем координат R и R' и положить: $c_{22} = \cos\alpha$, $c_{23} = \sin\alpha$, $c_{32} = -\sin\alpha$, $c_{33} = \cos\alpha$, $c_{11} = 1$, $c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{31} = 0$, то получим формулы (4). Отсюда и из (2) получаем искомые формулы:

$$x = x',$$
$$y = y'\cos\alpha - z'\sin\alpha,$$
$$z = y'\sin\alpha + z'\cos\alpha. \ ■$$

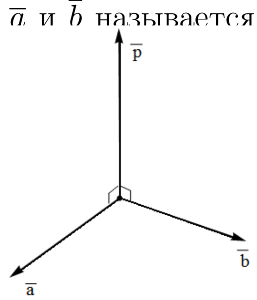
5.5 Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{p}$ такой, что

1). $\overline{p} \perp \overline{a}$, $\overline{p} \perp \overline{b}$.

2). $|\overline{p}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\angle(\overline{a}, \overline{b})$.

3). Базис $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{p}\}$ - правый.



Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение считается равным нуль-вектору по определению.

Замечание. В 3) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{p}$ действительно образую базис, так как $\sin\angle(\overline{a}, \overline{b}) \neq 0$ в силу непараллельности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, поэтому из (2): $|\overline{p}| \neq 0$, то есть $\overline{p} \neq \overline{0}$, а из 1) следует некомпланарность векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{p}$.

Векторное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ обозначается так: $\overline{a} \times \overline{b}$, $[\overline{a}, \overline{b}]$, $\overline{a} \wedge \overline{b}$.

Из определения векторного произведения следует, что векторное произведение векторов определяется своими сомножителями однозначно.

Теорема 5.9 . *Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в декартовым базисе $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Тогда*

$$\overline{a} \times \overline{b} = \varepsilon\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), \tag{1}$$

где $\varepsilon = +1$, если базис B - правый и $\varepsilon = -1$ в противном случае.

■ Обозначим через $\overline{q}$ вектор в правой части равенства (1). Докажем, что $\overline{q} = \overline{a} \times \overline{b}$. Покажем, что вектор $\overline{q}$ удовлетворяет определению векторного произведения.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ параллельны, то их координаты пропорциональны и поэтому определители в (1) все равны нулю, то есть $\overline{q} = \overline{0}$. С другой стороны, по определению векторного произведения, $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$. Поэтому $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{q}$ в этом случае.

Считаем, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не параллельны и покажем, что $\overline{q}$ удовлетворяет свойствам 1), 2) и 3) определения векторного произведения векторов.

1). По определению скалярного произведения, можно записать

$$\overline{a} \cdot \overline{q} = \varepsilon(x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}) = \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

так как элементы двух строк последнего определителя равны. Поэтому, $\overline{a} \perp \overline{q}$. Аналогично можно показать, что $\overline{b} \perp \overline{q}$.

2). Докажем, что $|\overline{q}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin \angle(\overline{a}, \overline{b})$. Рассмотрим квадрат правой части этого равенства: $(|\overline{a}||\overline{b}| \sin \angle(\overline{a}, \overline{b}))^2 = \left(|\overline{a}||\overline{b}|\sqrt{1 - \cos^2 \angle(\overline{a}, \overline{b})}\right)^2 =$
$\left(|\overline{a}||\overline{b}|\sqrt{1 - (\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|})^2}\right)^2 = |\overline{a}|^2|\overline{b}|^2 - (\overline{a}\cdot\overline{b})^2 = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 =$
${x_1}^2{x_2}^2 + {x_1}^2{y_2}^2 + {x_1}^2{z_2}^2 + {y_1}^2{x_2}^2 + {y_1}^2{y_2}^2 + {y_1}^2{z_2}^2 + {z_1}^2{x_2}^2 + {z_1}^2{y_2}^2 + {z_1}^2{z_2}^2$- ${x_1}^2{x_2}^2 -$
${y_1}^2{y_2}^2 - {z_1}^2{z_2}^2$- $2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_2z_1z_2 - 2y_1y_2z_1z_2 = x_1y_2(x_1y_2 - y_1x_2) + y_1x_2(y_1x_2 -$
$x_1y_2) + x_1z_2(x_1z_2 - z_1x_2) + z_1x_2(z_1x_2 - x_1z_2) + y_1z_2(y_1z_2 - z_1y_2) + z_2y_2(z_1y_2 - y_1z_2) =$
$(x_1y_2 - y_1x_2) \cdot (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_1z_2 - z_1x_2) \cdot (x_1z_2 - z_1x_2) + (y_1z_2 - z_1y_2) \cdot (y_1z_2 - z_1y_2) =$
$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 = |\overline{q}|^2.$

3). Докажем, что вектор $\overline{q} \neq \overline{0}$. Если предположить противное, то из равенства нулю координат вектора $\overline{q}$ вытекает параллельность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Действительно, пусть $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$. Тогда $\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$. Из равенства $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ следует, что $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$. Поэтому $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ и векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ параллельны. Поэтому вектор $\overline{q} \neq \overline{0}$ и, учитывая доказанное в 1), заключаем, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{q}$ образуют базис векторов пространства.

Покажем, что базисы $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{q}\}$ и B одинаково ориентированы, если базис B - правый и противоположно ориентированы, если базис B - левый.

Возьмем определитель $\det C$ матрицы перехода от базиса B к базису $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{q}\}$:

$$\det C = \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Поменяем в этом определителе местами 2 и 3 строки, затем 2 и 1 и вычислим его:

$$\det C = \varepsilon(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}).$$

Так как выражение в скобках равно $|\overline{q}|^2 > 0$, то знак $\det C$ совпадает со знаком ε. Если базис B - правый, то $\varepsilon = +1$, значит $\det C > 0$ и поэтому базисы B и $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{q}\}$ одинаково ориентированы. Следовательно базис $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{q}\}$ - правый. Если базис B - левый, то $\varepsilon = -1$, значит $\det C < 0$ и поэтому базисы B и $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{q}\}$ противоположно ориентированы. Следовательно и в этом случае базис $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{q}\}$ - правый. ■

Свойства векторного произведения.

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ справедливы равенства:

1). $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$

2). $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{a}\times\overline{c}$.

3). $(\lambda\overline{a})\times\overline{b}=\lambda(\overline{a}\times\overline{b})$.

■ Доказательства свойств вытекают из теоремы 6.9: надо ввести координаты векторов и вычислить левые и правые части равенств. ■

Замечание. В дальнейшем, исходный базис всегда будет считаться правым. Равенство (1) для такого базиса обычно представляют в виде следующей формальной записи:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}.$$

Если вычислить такой "определитель", пользуясь определением определителя, то получим формулу (1): $\overline{a}\times\overline{b}=$

$$\overline{i}\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}=(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}).$$

Геометрический смысл модуля векторного произведения.

Модуль векторного произведения $|\overline{a}\times\overline{b}|$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен площади параллелограмма естественным образом построенного на этих векторах.

■ См. свойство 2) определения векторного произведения. ■

Пример. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$, если заданы его вершины в некоторой декартовой системе координат: $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$.

■ Достроим треугольник $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABDC$. Так как $\overline{AB}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, $\overline{AC}(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$ и $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{ABDC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$, то

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\end{vmatrix}|.$$ ■

5.6 Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число, равное $\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$. Обозначение: $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.

Теорема 5.10 *Пусть $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\overline{c}=(x_3,y_3,z_3)$ в декартовом базисе $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$. Тогда*

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\varepsilon\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix},$$

где $\varepsilon=+1$, если базис $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ - правый и $\varepsilon=-1$ в противном случае.

■ По теореме 6.9:

$$\overline{b}\times\overline{c}=\varepsilon(\begin{vmatrix} y_2 & z_3\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}).$$

Поэтому $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})=$

$$\varepsilon(x_1\cdot\begin{vmatrix} y_2 & z_3\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}-y_1\cdot\begin{vmatrix} x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}+z_1\cdot\begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix})=\varepsilon\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \blacksquare$$

Свойства смешанного произведения векторов.

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и числа λ справедливы равенства:

1). $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=-(\overline{b},\overline{a},\overline{c})=(\overline{b},\overline{c},\overline{a})=-(\overline{c},\overline{b},\overline{a})$.

2). $(\overline{a}+\overline{a}_1,\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},\overline{b},\overline{c})+(\overline{a}_1,\overline{b},\overline{c})$.

3). $(\lambda\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\lambda(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.

4). Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=0$.

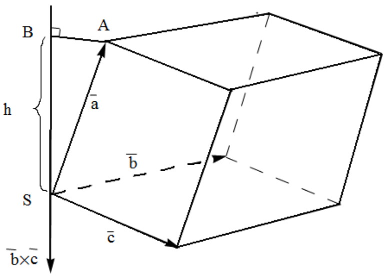
■ Первые три свойства вытекают из теоремы 10 и свойств определителей (Приложение 6.1), последнее свойство - следствие теоремы 4. ■

Лемма 5.2 *Пусть* $\overline{a}_1=\alpha_1\overline{a}+\beta_1\overline{b}+\gamma_1\overline{c}, \overline{b}_1=\alpha_2\overline{a}+\beta_2\overline{b}+\gamma_2\overline{c}, \overline{c}_1=\alpha_3\overline{a}+\beta_3\overline{b}+\gamma_3\overline{c}$. *Тогда*

$$(\overline{a}_1,\overline{b}_1,\overline{c}_1)=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\cdot(\overline{a},\overline{b},\overline{c}).$$

■ Из свойств смешанного произведения векторов и определителей следует, что $(\overline{a}_1,\overline{b}_1,\overline{c}_1)=(\alpha_1\overline{a}+\beta_1\overline{b}+\gamma_1\overline{c},\overline{b}_1,\overline{c}_1)=\alpha_1(\overline{a},\overline{b}_1,\overline{c}_1)+\beta_1(\overline{b},\overline{b}_1,\overline{c}_1)+\gamma_1(\overline{c},\overline{b}_1,\overline{c}_1)=\alpha_1(\overline{a},\alpha_2\overline{a}+\beta_2\overline{b}+\gamma_2\overline{c},\overline{c}_1)+\beta_1(\overline{b},\alpha_2\overline{a}+\beta_2\overline{b}+\gamma_2\overline{c},\overline{c}_1)+\gamma_1(\overline{c},\alpha_2\overline{a}+\beta_2\overline{b}+\gamma_2\overline{c},\overline{c}_1)=\alpha_1[\alpha_2(\overline{a},\overline{a},\overline{c}_1)+\beta_2(\overline{a},\overline{b},\overline{c}_1)+\gamma_2(\overline{a},\overline{c},\overline{c}_1)]+\beta_1[\alpha_2(\overline{b},\overline{a},\overline{c}_1)+\beta_2(\overline{b},\overline{b},\overline{c}_1)+\gamma_2(\overline{b},\overline{c},\overline{c}_1)]+\gamma_1[\alpha_2(\overline{c},\overline{a},\overline{c}_1)+\beta_2(\overline{c},\overline{b},\overline{c}_1)+\gamma_2(\overline{c},\overline{c},\overline{c}_1)]=\alpha_1[\beta_2(\overline{a},\overline{b},\overline{c}_1)+\gamma_2(\overline{a},\overline{c},\overline{c}_1)]+\beta_1[\alpha_2(\overline{b},\overline{a},\overline{c}_1)+\gamma_2(\overline{b},\overline{c},\overline{c}_1)]+\gamma_1[\alpha_2(\overline{c},\overline{a},\overline{c}_1)+\beta_2(\overline{c},\overline{b},\overline{c}_1)]=\alpha_1\beta_2\gamma_3(\overline{a},\overline{b},\overline{c})+\alpha_1\beta_3\gamma_2(\overline{a},\overline{c},\overline{b})+\alpha_2\beta_1\gamma_3(\overline{b},\overline{a},\overline{c})+\alpha_3\beta_1\gamma_2(\overline{b},\overline{c},\overline{a})+\alpha_2\beta_3\gamma_1(\overline{c},\overline{a},\overline{b})+\alpha_3\beta_2\gamma_1(\overline{c},\overline{b},\overline{a})=(\alpha_1\beta_2\gamma_3-\alpha_1\beta_3\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_3\beta_1\gamma_2+\alpha_2\beta_3\gamma_1-\alpha_3\beta_2\gamma_1)\cdot(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=(\alpha_1\cdot\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2\\ \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}-\beta_1\cdot\begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \gamma_3\end{vmatrix}+\gamma_1\cdot\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix})\cdot(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\cdot(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$. ■

Геометрический смысл модуля смешанного произведения.



Отложим от некоторой точки S векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Отрезки, порождающие эти векторы, имеют общую точку S и являются ребрами параллелепипеда, объем которого обозначим через V. Покажем, что

$$V=|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})|.$$

■ Пусть векторы $\overline{b}$, $\overline{c}$ порождают основание параллелепипеда. Из определений скалярного и смешанного произведений: $|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})|=|\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})|=||\overline{a}||\overline{b}\times\overline{c}|\cdot\cos\angle(\overline{a},\overline{b}\times\overline{c})|=|\overline{a}||\overline{b}\times\overline{c}||\cos\angle(\overline{a},\overline{b}\times\overline{c})|=S_{основания}\cdot|\overline{a}||\cos\angle(\overline{a},\overline{b}\times\overline{c})|=S_{основания}\cdot h$, где h - высота параллелепипеда.

Действительно, прямая l, проходящая через точку S перпендикурярно основанию параллелепипеда, параллельна вектору $\overline{b} \times \overline{c}$. Если точка A такая, что $\overline{SA} = \overline{a}$, и B - ортогональная проекция точки A на l, то $h = SB = |\overline{a}||\cos\angle(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c})|$. ■

Задача. Пусть C - матрица перехода от декартова базиса $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ к декартову базису $\{\overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}\}$. Тогда $detC = \pm 1$.

6 Плоскость и прямая

В этом разделе изучаются прямые и плоскости в пространстве - рассматриваются различные способы задания прямых и плоскостей, выводятся их уравнения, исследуется взаимное расположение прямых и плоскостей, если заданы их уравнения. Теория плоскостей в пространстве является простым обобщением теории прямых на плоскости.

6.1 Уравнение множества точек

Зафиксируем в пространстве некоторую аффинную систему координат, координаты.

Уравнением множества F пространства называется такая система уравнений и неравенств относительно переменных x, y, z, что любые ее решения и только они являются координатами точек, принадлежащих F.

Пример. Пусть ω - сфера с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиус R.

■ Точка $M(x, y, z)$ принадлежит сфере ω тогда и только тогда, когда $M_0M = r$. В координатах: $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r$. Возводим в квадрат части последнего уравнения и получаем уравнение сферы:
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$. ■

По аналогии с алгебраическими линиями, в пространстве методами аналитической геометрии изучаются, так называемые, алгебраические поверхности, то есть, такие множества, которые в некоторой системе координат могут быть заданы уравнением вида: $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ многочлен первого или второго порядка относительно переменных x, y, z. При этом, порядок многочлена называется порядком алгебраической поверхности. Алгебраические поверхности, заданные уравнением первого порядка, как будет показано, являются плоскостями, алгебраические поверхности, заданные уравнением второго порядка, называются поверхностями второго порядка.

Порядок алгебраической поверхности не зависит от системы координат, в которой она задана. ■ Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.2 первого семестра.■

Параметрические уравнения множества.

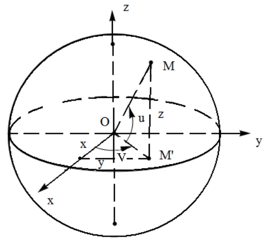
Уравнения $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ (1), где $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$ - функции, определенные на множестве $D = [a, b] \times [c, d]$, называются параметрическими уравнениями множества F, если 1) для любых $(u, v) \in D$ точка с координатами $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$, принадлежит F и 2) для координат x, y, z любой точки $M \in F$

существуют $(u,v) \in D$ такие, что координаты x,y,z и u,v есть решения уравнений (1). При этом u,v называются параметрами точки M множества F.

Пример. Параметрические уравнения сферы. Пусть F - сфера радиуса r, центр которой совпадает с началом декартовой системы координат $R = (O,\bar{i},\bar{j},\bar{k})$. Покажем, что уравнения

$$x = r\cos u \cos v, \quad y = r\cos u \sin v, \quad z = r\sin u, \tag{2}$$

$u \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $v \in [-\pi,\pi]$, есть параметрические уравнения сферы.



■ Рассмотрим ориентированные углы: $v = \measuredangle(\bar{i},\overline{OM'})$, $u = \measuredangle(\overline{OM'},\overline{OM})$ - широту и долготу точки M сферы, $u \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $v \in [-\pi,\pi]$, M' - ортогональная проекция точки M на координатную плоскость XOY.

Пусть x,y,z - координаты точки M. Тогда $z = OM\sin u = r\sin u$, $x = OM'cosv = OM\cos u\cos v = r\cos u\cos v$, $y = OM'sinv = OM\cos u\sin v = r\cos u\sin v$. Следовательно, координаты x,y,z точки сферы, широта u и долгота v удовлетворяют (2).

С другой стороны, при любых u, v координаты x,y,z, полученные из (2), есть координаты точки сферы, так как $x^2+y^2+z^2 = r^2$. ■

Лемма 6.1 *Пусть множество F задано уравнением $f(x,y,z) = 0$, а множество G уравнением $g(x,y,z) = 0$. Тогда пересечение этих множеств $F \cap G$ задается системой уравнений*

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0, \\ g(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

а объединение этих множеств $F \cup G$ уравнением $f(x,y,z) \cdot g(x,y,z) = 0$.

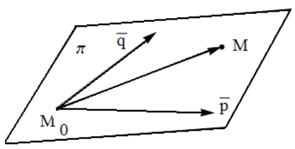
■ См. доказательство леммы 3.1. ■

6.2 Различные способы задания плоскости

Напомним определения: вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен плоскости π, если прямая (AB) перпендикулярна плоскости π; ноль-вектор считается перпендикулярным любой плоскости. Обозначение: $\overline{AB} \perp \pi$. **Ненулевой** вектор $\overline{n}$, перпендикулярный плоскости π, называется **нормальным** вектором плоскости π.

Рассмотрим различные способы задания плоскости и в каждом случае выведем уравнение плоскости в некоторой аффинной системе координат.

1). **Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя векторами.**



Пусть плоскость π проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\overline{p} = (\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $\overline{q} = (\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$. Такая плоскость существует и единственна. Векторы $\overline{p}$, $\overline{q}$ составляют базис векторов плоскости π. Напишем уравнение плоскости π.

■ Точка $M(x,y,z) \in \pi$ тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$, $\overline{p}$, $\overline{q}$ компланарны. Последнее условие равносильно:

а) существованию чисел $u, v \in R$ таких, что $\overline{M_0M} = u\overline{p} + v\overline{q}$ (u, v - координаты вектора $\overline{M_0M}$ в базисе $\{\overline{p}, \overline{q}\}$) или в координатах: $x - x_0 = u\alpha_1 + v\alpha_2$, $y - y_0 = u\beta_1 + v\beta_2$, $z - z_0 = u\gamma_1 + v\gamma_2$ или

$$x - x_0 = u\alpha_1 + v\alpha_2, \quad y - y_0 = u\beta_1 + v\beta_2, \quad z - z_0 = u\gamma_1 + v\gamma_2. \tag{1}$$

Уравнения (1) называется параметрическими уравнениями плоскости.

б) в силу теоремы 6.4:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \ \blacksquare \tag{2}$$

Если раскрыть определитель, то получим уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, в котором не все коэффициенты при неизвестных равны нулю.

2). **Уравнение плоскости, заданной тремя точками.** Напишем уравнение плоскости π, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, x_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой (неколлинеарные точки).

■ Так как точки M_1, M_2, M_3 не коллинеарны, то векторы $\overline{M_1M_2}$, и $\overline{M_1M_3}$ не параллельны. Поэтому плоскость π можно задать по-другому: считать, что плоскость π проходит через точку $M_1 \in \pi$, параллельно векторам $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$. Так как $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, то, применяя уравнение (2), получим уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \ \blacksquare \tag{3}$$

Пример. Напишем уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$, $a \cdot b \cdot c \neq 0$. ■ Запишем уравнение (3):

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, преобразуем его и получим уравнение плоскости "в отрезках":

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Здесь $|a|$, $|b|$, $|c|$ длины отрезков, которые плоскость "отсекает" от осей координат. ■

3). **Плоскость, заданная точкой и нормальным вектором.**

В этом пункте система координат декартова. Напишем уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, x_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\overline{n}(A, B, C)$.

■ Точка $M(x, y, z) \in \pi \iff \overline{M_0M} \perp \overline{n} \iff \overline{M_0M} \cdot \overline{n} = 0$. Запишем скалярное произведение в координатах и получим искомое уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \ \blacksquare$$

6.3 Общее уравнение плоскости

Все уравнения плоскости можно привести к виду $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C не равны нулю одновременно. Верно и обратное утверждение.

Теорема 6.1 *Множество, заданное в некоторой аффинной системе координат R уравнением вида $Ax+By+Cz+D=0$ (1), где A, B, C одновременно не обращаются в ноль, есть плоскость, параллельная векторам $\overline{a}(0,-C,B)$, $\overline{b}(-C,0,A)$, $\overline{c}(-B,A,0)$ и проходящая через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, где x_0,y_0,z_0 - решения (1).*

■ Так как A, B, C не нули одновременно, то уравнение (1) имеет решение, например, $x_0 = -\frac{C}{A}$, $y_0 = z_0 = 0$, если $A \neq 0$. Считаем для определенности, что $A \neq 0$. Тогда векторы $\overline{b}$ и $\overline{c}$ не коллинеарны, координаты этих векторов не пропорциональны. Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-\frac{C}{A},0,0)$, параллельно векторам $\overline{b}(-C,0,A)$ и $\overline{c}(-B,A,0)$. Воспользуемся уравнением 2 §7.2: $\begin{vmatrix} x+\frac{C}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0$ или, раскрыв определитель, получим $Ax+By+Cz+D=0$. Это уравнение плоскости в точности совпадает с уравнением (1). Поэтому (1) - есть уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами $x_0 = -\frac{C}{A}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, параллельно векторам $\overline{b}(-C,0,A)$ и $\overline{c}(-B,A,0)$. Компланарность векторов $\overline{a}(0,-C,B)$, $\overline{b}(-C,0,A)$, $\overline{c}(-B,A,0)$ следует из теоремы 6.4. ■

Уравнение (1) называется **общим уравнением** плоскости.

Следствие. Если R - декартова система координат, то вектор $\overline{n} = (A,B,C)$ есть нормальный вектор плоскости (1).

■ Действительно, $\overline{n}\cdot\overline{c} = A(-B)+B\cdot A+C\cdot 0 = 0$. Аналогично, $\overline{n}\cdot\overline{a} = 0$, $\overline{n}\cdot\overline{b} = 0$. Следовательно, вектор $\overline{n}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и поэтому является нормальным вектором плоскости. ■

Лемма 6.2 *Пусть R - аффинная система координат. Вектор $\overline{a} = (\alpha,\beta,\gamma)$ параллелен плоскости, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда*

$$A\cdot\alpha+B\cdot\beta+C\cdot\gamma = 0.$$

■ Пусть плоскость π задана уравнением (1), точка $P(x_1,y_1,z_1) \in \pi$, точка $Q(x_2,y_2,z_2)$ такая, что $\overline{PQ} = \overline{a}$. Запишем это равентсво в координатах: $x_2-x_1 = \alpha$, $y_2-y_1 = \beta$, $z_2-z_1 = \gamma$. Отсюда следует, что $A\cdot\alpha+B\cdot\beta+C\cdot\gamma = A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1) = Ax_2+By_2+Cz_2-(Ax_1+By_1+Cz_2) = Ax_2+By_2+Cz_2+D$.

Таким образом,

$$A\cdot\alpha+B\cdot\beta+C\cdot\gamma = Ax_2+By_2+Cz_2+D. \tag{2}$$

Из равенства (2) следует доказательство леммы: $\overline{a}||\pi \iff Q\in\pi \iff Ax_2+By_2+Cz_2+D = 0 \iff A\cdot\alpha+B\cdot\beta+C\cdot\gamma = 0$. ■

Исследование расположения плоскости относительно аффинной системы координат $R = (O,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$ по ее общему уравнению.

Пусть плоскость π задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.

1). Плоскость π параллельна оси OX тогда и только тогда, когда $A=0$. ■ Действительно, $\pi||OX \iff \pi||\overline{e}_1(1,0,0)$. По лемме 7.2 последнее условие равносильно $A=0$. ■

Аналогично, $\pi||OY \iff B=0$, $\pi||OZ \iff C=0$.

2). Плоскость π параллельна координатной плоскости XOY тогда и только тогда,когда $A=B=0$.

■ $\pi||XOY \iff \pi||OX,\ \pi||OY \iff A=B=0$. ■

Аналогично, $\pi||YOZ \iff B=C=0$, $\pi||XOZ \iff A=C=0$.

Геометрический смысл знака многочлена $Ax+By+Cz+D$, где $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Пусть дана плоскость $\pi: Ax+By+Cz+D=0$. Для точки $M(x,y,z)$ обозначим через $\pi(M)=Ax+By+Cz+D$. Точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда $\pi(M)=0$.

Пусть точка M принадлежит отрезку $[PQ]$, $\lambda=(P,Q;M)$- простое отношение трех точек. Так же, как и в случае плоскости, можно вывести, что

$$\pi(M)=\frac{1}{1+\lambda}(\pi(P)+\lambda\pi(Q)).$$

В этих обозначениях имеет место

Теорема 6.2 *Концы отрезка* $[PQ]$ *не принадлежат плоскости* $\pi: Ax+By+Cz+D=0$. *Тогда:*

1). $[PQ]\cap\pi\neq\emptyset \iff \pi(P)\cdot\pi(Q)<0$.

2). $[PQ]\cap\pi=\emptyset \iff \pi(P)\cdot\pi(Q)>0$.

■ Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.4. ■

Следствие. 1). Пусть точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ такая, что $Ax_0+By_0+Cz_0+D\ >0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Пусть E_+ (E_-) полупространство, ограниченное плоскостью $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ и содержащее (не содержащее) точку M_0. Применяя теорему, запишем $E_+=\{M|$ отрезок $[M_0M]$ не пересекается с плоскостью $\pi\}=\{M|\pi(M)\cdot\pi(M_0)>0\}=\{M|\pi(M)>0\}$.

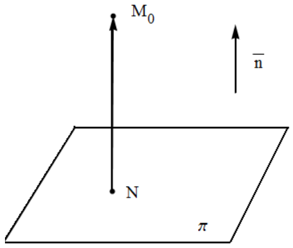
Таким образом,

$$E_+=\{M|Ax+By+Cz+D>0\}.$$

Другими словами полупространство E_+ задается неравенством $Ax+By+Cz+D>0$. Аналогично доказывается, что $E_-: Ax+By+Cz+D<0$.

2). Отложим от точки $D(x,y,z)\in\pi$ вектор $\overline{n}(A,B,C): \overline{DG}=\overline{n}$. Тогда $G(x+A,y+B,z+C)$ и $\pi(G)=A(x+A)+B(y+B)+C(z+C)+D=A^2+B^2+C^2>0$. Таким образом, вектор $\overline{n}(A,B,C)$ "направлен" в полупространство $E_+: Ax+By+Cz+D>0$.

Расстояние от точки до плоскости. Система координат в этом пункте декартова. Найдем расстояние $\rho(M_0,\pi)$ от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $\pi: Ax+By+Cz+D=0$.



■ Пусть $N(x_1,y_1,z_1)$ - ортогональная проекция точки M_0 на плоскость π.

Для нормального вектора $\overline{n}(A,B,C)$ угол $\angle(\overline{n},\overline{NM_0})$ равен либо 0, либо 180°. Поэтому справедливо равенство $\frac{|\overline{n}|}{|\overline{n}|}|\cos\angle(\overline{n},\overline{NM_0})|=1$. Теперь можно записать, что $\rho(M_0,\pi)=|\overline{NM_0}|=|\overline{NM_0}|\frac{|\overline{n}|}{|\overline{n}|}|\cos\angle(\overline{n},\overline{NM_0})|=\frac{1}{|\overline{n}|}||\overline{NM_0}||\overline{n}|\cos\angle(\overline{n},\overline{NM_0})|=\frac{1}{|\overline{n}|}|\overline{NM_0}\cdot\overline{n}|=\frac{1}{|\overline{n}|}|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|=\frac{1}{|\overline{n}|}|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|$.

Так как $N \in \pi$, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$, поэтому $\rho(M_0, \pi) = \frac{1}{|\overline{n}|}|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|$. Подставим сюда $|\overline{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ и окончательно получим:

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad \blacksquare$$

Взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Рассмотрим две плоскости $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$. Выясним зависимость взаимного расположение плоскостей и коэффициентов в этих уравнениях.

1). Пусть $\pi_1||\pi_2$. По теореме 7.1 векторы $\overline{a}_2(0, -C_2, B_2)$, $\overline{b}_2(-C_2, 0, A_2)$, $\overline{c}_2(-B_2, A_2, 0)$ параллельны плоскости π_2, следовательно, они будут параллельны и плоскости π_1. Так как эти векторы параллельны плоскости π_1, то по лемме 7.2:

$$B_1(-C_2) + C_1B_2 = 0, \quad A_1(-C_2) + C_1A_2 = 0, \quad A_1(-B_2) + B_1A_2 = 0. \tag{3}$$

Допустим, что $A_2 \neq 0$. Тогда найдется λ такое, что $A_1 = \lambda A_2$. Отсюда и из (3) следует, что $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$. Ясно, что верно и обратное утверждение - если коэффициенты при неизвестных в уравнениях плоскостей пропорциональны, то в соответствии с теоремой 7.1, плоскости будут параллельны одним и тем же векторам. Таким образом,

$$\pi_1||\pi_2 \iff A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2 \quad C_1 = \lambda C_2$$

или

$$\pi_1||\pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{4}$$

если $A_2B_2C_2 \neq 0$.

2). Пусть $\pi_1 = \pi_2$. Так как эти плоскости параллельны, то существует число λ такое, что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$. Перепишем уравнение плоскости π_1 : $\lambda(A_2x+B_2y+C_2z)+D_1 = 0$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi_1 \cap \pi_2$: $\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_1z_0)+D_1 = 0$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2 = 0$. Отсюда получим: $\lambda D_2 = D_1$. Таким образом, если $\pi_1 = \pi_2$, то коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Верно и обратное утверждение: если коэффициенты в уравнениях этих плоскостей пропорциональны, то, домножая одно из уравнений на коэффициент пропорциональности, получим другое уравнение. Следовательно, $\pi_1 = \pi_2$. Итак,

$$\pi_1 = \pi_2 \iff A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2, \quad D_1 = \lambda D_2$$

или

$$\pi_1 = \pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

если $A_2B_2C_2D_2 \neq 0$.

6.4 Уравнения прямой в пространстве

Общее уравнение прямой. Две плоскости $\pi_i : A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2$, пересекаются по прямой тогда и только тогда, когда они не параллельны. Отсюда и из равносильности (4) §7.3 получаем: система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

задаёт прямую тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных в этих уравнениях не пропорциональны или ранг матрицы, составленной из коэффициентов при переменных, равен двум:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2. \tag{1'}$$

Система (1) при условии, что коэффициенты при переменных в этих уравнениях не пропорциональны, называется **общим** уравнением прямой в пространстве.

Параметрическое и каноническое уравнения прямой. Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельна ненулевому вектору $\overline{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Найдем уравнение прямой l.

■ Точка $M(x, y, z) \in l$ тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M} || \overline{p}$. Последнее условие равносильно существованию числа $t \in R$ такого, что $\overline{M_0M} = t\overline{p}$, или, в координатах: $x - x_0 = \alpha t, \quad y - y_0 = \beta t, \quad z - z_0 = \gamma t$ или

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, \quad z = z_0 + \gamma t. \tag{2}$$

Уравнения (2) называются параметрическим уравнением прямой.

Исключая из уравнений (2) параметр t, получим

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}, \\ \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) - это общее уравнение прямой l, в котором коэффициенты имеют геометрический смысл. Обычно уравнения (3) записывают в следующем виде:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}. \tag{4}$$

Равенства (4) называют **каноническим** уравнением прямой. Считается при этом, что $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$. ■

Замечание. Рассмотрим частные случаи. Пусть, например, в (2) $\alpha = 0$, $\beta \cdot \gamma \neq 0$: $x = x_0, \quad y = y_0 + \beta t, \quad z = z_0 + \gamma t$. Исключая параметр t из второго и третьего уравнений, получим следующее общее уравнение прямой:

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}. \end{cases} \tag{5}$$

Если в (2), например, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$, то уравнения (2) равносильны системе уравнений вида

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ y - y_0 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Будем допускать в каноническом уравнении (4) "деление на ноль", понимая при этом, что при $\alpha = 0$, $\beta \cdot \gamma \neq 0$ уравнение (4) превращается в уравнение (5), а при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ уравнение (4) превращается в (6) и так далее.

Уравнение прямой, заданной двумя точками. Напишем уравнение прямой l, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

■ Так как $M_1 \neq M_2$, то вектор $\overline{p} = \overline{M_1 M_2}$ - направляющий вектор прямой l. Поэтому прямую l можно перезадать: считать, что прямая l проходит через точку $M_1 \in l$ параллельно вектору $\overline{p}$. Так как $\overline{p} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, то, применяя уравнение (4), получим уравнение прямой l, заданной двумя точками:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad ■$$

6.5 Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых

Прямая и плоскость.

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\overline{p}(\alpha, \beta, \gamma)$ и $Ax + By + Cz + D = 0$ - уравнение плоскости π.

1). Прямая l параллельна плоскости π тогда и только тогда, когда $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.

■ Утверждение следует из леммы 7.2. ■

2). Прямая l пересекает плоскость π в единственной точке тогда и только тогда, когда $A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0$.

3). Прямая l принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

■ Действительно, первое условие равносильно тому, что прямая параллельна плоскости, второе - прямая и плоскость имеют общую точу. Эти два условия равносильны тому, что прямая принадлежит плоскости. ■

Пусть теперь прямая и плоскость заданы общими уравнениями:

$$l : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \pi : A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0. \tag{1}$$

Пусть r - ранг матрицы, r' - ранг расширенной матрицы m системы σ, составленной из этих трех уравнений. Тогда

1). $l \cap \pi$ есть точка (система σ имеет единственное решение) тогда и только тогда, когда $r = 3$.

2). $l \cap \pi = \emptyset$ (система σ не совместна) тогда и только тогда, когда $r = 2$, $r' = 3$.

3). $l \subset \pi$ (система σ имеет бесконечно много решений) тогда и только тогда, когда $r = r' = 2$.

■ Первые два утверждения следуют из теоремы Кронекера-Капелли. Докажем 3). Если в матрице m первые две строки составляют расширенную матрицу системы в (1), то, в силу (1′) §7.4 и равенства $r' = 2$, третья строка матрице m будет линейной комбинацией первых двух строк. Поэтому система σ будет равносильна системе в (1). Это значит, что координаты всех точек прямой l будут решениями системы σ, в частности, удовлетворять уравнению плоскости π. ■

Две прямые. Пусть прямая l_i проходит через точку M_i параллельно ненулевому вектору $\overline{p}_i$, $i = 1, 2$.

Обозначим через $\overline{p} = \overline{M_1 M_2}$, Δ - определитель, составленный из координат векторов $\overline{p}, \overline{p}_1, \overline{p}_2$. Если система координат декартова, то определитель Δ будет смешанным произведением векторов.

Лемма 6.3 *Прямые* l_1, l_2 *лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда определитель* $\Delta = 0$.

■ Прямые l_1, l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{p}$, $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$ компланарны, последнее равносильно равенству $\Delta = 0$. ■

1). Прямые l_1, l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$.

2). Пусть $\Delta = 0$. Прямые l_1, l_2 лежат в одной плоскости. Возможны следующие варианты:

a) $l_1 \cap l_2 = \emptyset \iff \overline{p}_1 || \overline{p}_2, \quad \overline{p}_1 \not\parallel \overline{p}$.

b) $l_1 \cap l_2 = \{одна \quad точка\} \iff \overline{p}_1 \not\parallel \overline{p}_2$.

c) $l_1 = l_2 \iff \overline{p}_1 || \overline{p}_2, \quad \overline{p}_1 || \overline{p}$.

Пусть теперь прямые l_1, l_2 заданы общими уравнениями. Составим систему Σ из четырех уравнений, задающих эти прямые. Пусть r - ранг матрицы системы, r' - ранг расширенной матрицы такой системы. Ясно, что $2 \leqslant r \leqslant 3$, $2 \leqslant r' \leqslant 4$.

Лемма 6.4 *Прямые* l_1, l_2 *параллельны тогда и только тогда, когда* $r = 2$.

■ Лемма справедлива для любой системы координат. Ограничимся более простым случаем - декартовой системой координат. Допустим, что прямая l_1 задана системой в (1). Каждое уравнение такой системы есть уравнение плоскости, содержащей прямую l_1. Следовательно, нормальные векторы этих плоскостей (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) будет перпендикулярны прямой l_1. Таким образом, две строки матрицы системы Σ есть координаты векторов, перпендикулярных прямой l_1. Аналогично, две другие строки матрицы системы Σ будут координаты векторов, перпендикулярных прямой l_2. Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда, и только тогда, когда четыре нормальных вектора будут компланарны. Так как на плоскости линейно независимых векторов может быть не больше двух, то система Σ имеет только две линейно независимые строки (например, строки из коэффициентов системы (1)), то есть, матрица системы Σ имеет ранг 2. ■

Теперь опишем взаимное расположение прямых l_1, l_2 в зависимости от рангов матриц.

1). $r = r' = 2 \iff$ прямые l_1, l_2 параллельны по лемме 7.4 и система Σ совместна, то есть, прямые имеют общую точку $\iff l_1 = l_2$.

2). $r = 2$, $r' \neq 2 \iff$ прямые l_1, l_2 параллельны по лемме 7.4 и система Σ не совместна, то есть, прямые не имеют общих точек $\iff l_1 || l_2$ и $l_1 \neq l_2$.

3). $r = r' = 3 \iff$ система Σ имеет единственное решение $\iff l_1 \cap l_2 = \{\text{одна точка}\}$.

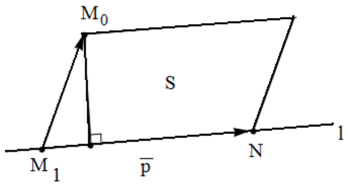
4). $r = 3, \quad r' = 4 \iff$ прямые не параллельны и система Σ не совместна (прямые не имеют общих точек) $\iff l_1, l_2$ - скрещиваются.

6.6 Расстояние от точки до прямой. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние от точки до прямой. Пусть дана прямая l, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно вектору $\overline{p}(\alpha, \beta, \gamma)$, и дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Отложим вектор $\overline{p}$ от точки M_1 : $\overline{M_1N} = \overline{p}$. Пусть S - площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{M_1N}$ и $\overline{M_1M_0}$. Тогда

$$\rho(M_0, l) = \frac{S}{|\overline{p}|}.$$

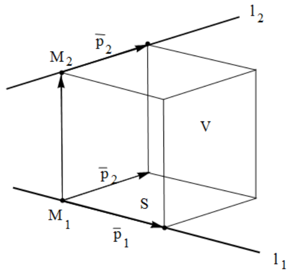
Из геометрического смысла модуля смешанного произведения следует, что площадь $S = |\overline{p} \times \overline{M_1M_0}|$. Поэтому



$$\rho(M_0, l) = \frac{|\overline{p} \times \overline{M_1M_0}|}{|\overline{p}|} \tag{1}$$

Так как расстояние $\rho(l_1, l_2)$ между параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки M первой прямой до второй прямой, то, при вычислении расстояния $\rho(l_1, l_2)$ между параллельными прямыми, можно применять формулу (1).

Расстояние между скрещивающимися прямыми.



Даны две скрещивающиеся прямые l_1, l_2. Пусть прямая l_i проходит через точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ параллельно вектору $\overline{p}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2$.

Проведем через каждую прямую плоскость, параллельную другой прямой. Расстояние между такими параллельными плоскостями называется расстоянием между скрещивающимися прямыми (оно, очевидно, равно минимальному расстоянию между точками этих прямых.)

Найдем расстояние $\rho(l_1, l_2)$ между скрещивающимися прямыми l_1, l_2.

■ Для этого от точки $M_1 \in l_1$ отложим векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{p}_1$, $\overline{p_2}$ и достроим их до параллелепипеда. Основания такого параллелепипеда лежат на параллельных плоскостях, содержащих прямые. Поэтому его высота равна $\rho(l_1, l_2)$. Пусть V - объем параллелепипеда, S - площадь основания, тогда

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{V}{S}.$$

Отсюда и из геометрического смысла модулей смешанного и векторного произведений следует формула:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \overline{p}_1, \overline{p_2})|}{|\overline{p}_1 \times \overline{p_2}|}. \quad ■$$

7 Преобразования пространства

Определение аффинного преобразования плоскости, аналитическое задание аффинного преобразования плоскости, свойства аффинного преобразования без труда обобщаются на случай пространства. Так же, как и на плоскости, можно показать, что множество всех аффинных преобразований пространства есть группа относительно композиции преобразований. Геометрию аффинной группы преобразований называют аффинной геометрией в пространстве.

Подобные обобщения допускают движения и подобия плоскости.

7.1 Примеры преобразований пространства

Преобразование пространства - это биективное отображение пространства на себя. Рассмотрим примеры преобразований пространства.

1. **Параллельный перенос** - это отображение пространства на себя, ставящее в соответствие точке M точку M' такую, что $\overline{MM'} = \overline{p}$. Если $\overline{p} = (x_0, y_0, z_0)$, то параллельный перенос в пространстве можно задать формулами вида:

$$x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0, \quad z' = z + z_0. \tag{1}$$

С другой стороны, формулы вида (1) задают в пространстве параллельный перенос на вектор $\overline{p} = (x_0, y_0, z_0)$. Доказательство этого утверждения и ему подобного стандартно: надо написать формулы параллельного переноса на вектор $\overline{p}$, - получим формулы, совпадающие с формулами (1). Следовательно, (1) - параллельный перенос.

Задача. Показать, что композиция параллельных переносов на векторы $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$ есть параллельный перенос на вектор $\overline{p}_1 + \overline{p}_2$.

2. **Симметрия относительно плоскости.** Пусть π плоскость. Отображение пространства, ставящее в соответствие точке M точку M' такую, что середина отрезка $[MM']$ принадлежит плоскости π и отрезок $[MM']$ и плоскость π перпендикулярны называется симметрией (или отражением) пространства относительно плоскости π. Точка $M \in \pi$, по определению, соответствует сама себе: $M' = M$.

Расположим декартову систему координат R так, чтобы плоскость π была задана уравнением $z = a$. Тогда симметрию относительно π можно задать формулами:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z + 2a. \tag{2}$$

Верно и обратное утверждение: формулы вида (2) задают симметрию пространства относительно плоскости $z = a$.

Задача. Пусть S_π - симметрия относительно плоскости π, $P_{\overline{p}}$ - параллельный перенос на вектор $\overline{p} || \pi$. Показать, что $S_\pi \circ P_{\overline{p}} = P_{\overline{p}} \circ S_\pi$.

3. **Симметрия относительно прямой.** Пусть l - прямая. Отображение пространства, ставящее в соответствие точке M точку M' такую, что середина отрезка $[MM']$ принадлежит прямой l и отрезок $[MM']$ и прямая l перпендикулярны называется симметрией пространства относительно прямой l. Точка $M \in l$, по определению, соответствует сама себе $M' = M$.

Пусть прямая l совпадает с координатной осью OZ. Тогда симметрию относительно l можно задать формулами:

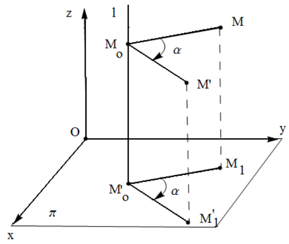
$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = z.$$

Задача. Показать, что симметрия относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей есть симметрия относительно прямой - пересечения этих плоскостей.

4. **Поворот относительно прямой.** Пусть l прямая, $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Отображение пространства, ставящее в соответствие точке M точку M', такую, что ортогональные проекции точек M и M' на прямую l совпадают (обозначим проекцию через M_0), $M_0M = M_0M'$, а направленный угол $\measuredangle(\overline{M_0M}, \overline{M_0M'}) = \alpha$, называется поворотом пространства относительно прямой l на угол α. Точка $M \in l$ по определению соответствует сама себе.

Замечание. Считаем, что ориентация всех плоскостей, перпендикулярных прямой l, порождена любым выбранным и зафиксированным направляющим вектором прямой l.

Пусть декартова система координат выбрана так, что ось $OZ||l$. Пусть $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$ соответствующие точки при повороте относительно l, а $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - их проекция на l. Рассмотрим точки $M_0'(x_0,y_0,0)$, $M_1(x,y,0)$, $M_1'(x',y',0)$ - ортогональные проекции точек M_0, M и M' на плоскость XOY. Тогда $M_0'M_1 = M_0'M_1'$, а $\measuredangle(\overline{M_0'M}_1, \overline{M_0'M'}_1) = \alpha$. Применяя формулы поворота плоскости, получим



$$\begin{aligned} x' - x_0 &= (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha, \\ y' - y_0 &= (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{aligned}$$

Так как $z = z' = z_0$, то получаем следующие формулы поворота пространства около прямой l :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0', \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0', \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{3}$$

где $x_0' = -x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha + x_0$, $y_0' = -x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha + y_0$.

Верно и обратное утверждение - формулы вида (3) задают поворот пространства.

5. **Сжатие к плоскости** π с коэффициентом сжатия $k \neq 0$ - это отображение f пространства, заданное правилом $M' = f(M)$, если M и M' ортогонально проектируется в одну и ту же точку плоскости π и $\overline{NM'} = k\overline{NM}$, где N - проекция M на π. Если $\pi = XOY$, $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$, то можно записать $x' - x_1 = k(x - x_1)$, $y' - y_1 = k(y - y_1)$, $z' - z_1 = k(z - z_1)$, где $N(x_1, y_1, z_1) \in \pi$. Учитывая, что $x_1 = x = x'$, $y_1 = y = y'$, а $z_1 = 0$, окончательно, получаем аналитическое задание сжатия пространства к плоскости XOY с коэффициентом сжатия k:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = kz.$$

6. **Винтовое движение** - это композиция поворота пространства относительно прямой и переноса на вектор, параллельный прямой.

7.2 Аффинные преобразования пространства

Возьмем в пространстве две аффинные системы координат R и R' и зададим отображение пространства на себя по следующему правилу: точке M с координатами x, y, z в системе координат R поставим в соответствие точку M' с теми же координатами x, y, z, но в системе координат R'. В силу единственности координат, такое отображение пространство будет преобразованием. Оно называется **аффинным преобразованием пространства**.

Будем говорить, что аффинное преобразование f задано парой аффинных систем координат (R, R').

Аналитическое задание аффинного преобразования. Пусть f аффинное преобразование, заданное парой аффинных систем координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ и $R' = (O', \overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3')$, причем известно, что

$$\begin{aligned} \overline{e}_1' &= c_{11}\overline{e}_1 + c_{12}\overline{e}_2 + c_{13}\overline{e}_3, \\ \overline{e}_2' &= c_{21}\overline{e}_1 + c_{22}\overline{e}_2 + c_{23}\overline{e}_3, \\ \overline{e}_3' &= c_{31}\overline{e}_1 + c_{32}\overline{e}_2 + c_{33}\overline{e}_3 \end{aligned}$$

и $O'(x_0, y_0, z_0)$ в системе координат R. Пусть $M' = f(M)$, $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ в системе координат R. Выразим x', y', z' через x, y, z.

■ Так как $M' = f(M)$, точка M имеет координаты (x, y, z) в R, то точка M' имеет те же координаты (x, y, z) в системе координат R'. Таким образом, $M'(x, y, z)$ в R и $M'(x', y', z')$ в R'. Применяя формулы (2) §6.4, запишем:

$$\begin{array}{l} x' = c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z + x_0, \\ y' = c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z + y_0, \\ z' = c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z + z_0, \end{array} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Тем самым найдены формулы, по которым можно найти координаты (x', y', z') образа $M' = f(M)$ точки $M(x, y, z)$ в одной системе координат R. ■

Рассмотрим обратную задачу: покажем, что отображение f пространства, заданное формулами (1) в системе координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ есть аффинное преобразование пространства.

■ Кроме системы координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ рассмотрим систему координат $R' = (O', \overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3)$, где координаты векторов $\overline{e}'_1 = (c_{11}, c_{12}, c_{13})$, $\overline{e}'_2 = (c_{21}, c_{22}, c_{23})$, $\overline{e}'_3 = (c_{31}, c_{32}, c_{33})$ и точки $O'(x_0, y_0, z_0)$ составлены из коэффициентов в (1). Напишем теперь формулы, задающие аффинное преобразование пространства, определенное парой систем координат R и R'. Конечно получим формулы (1). Следовательно f - аффинное преобразование пространства. ■

Отсюда следует, что все примеры из §8.1 есть примеры аффинных преобразований пространства.

Лемма 7.1 *Пусть аффинное преобразование f задано парой систем координат R, R'; $R_1 = (O, A, B, C)$ - аффинная система координат, $O' = f(O)$ $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$.*

1). Точки O', A', B', C' не лежат в одной плоскости и, следовательно, $R'_1 = (O', A', B', C')$ - аффинная система координат. Систему координат R_1 будем называть образом системы координат R и писать $R' = f(R)$.

2). Аффинное преобразование f можно задать парой систем координат R_1, R'_1 в смысле определения аффинного преобразования.

3). Если системы координат R и R' одинаково (противоположно) ориентированы, то и системы координат R_1 и R'_1 одинаково (противоположно) ориентированы.

Свойства аффинного преобразования

1). Аффинное преобразование f переводит отрезок в отрезок, луч в луч, полупространство в полупространство.

2). Аффинное преобразование сохраняет простое отношение трех точек: если A, B, C точки прямой, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ их образы относительно аффинного преобразования f, то $(A, B; C) = (A', B'; C')$. В частности, образ середины отрезка есть середина образа отрезка.

7.3 Движения пространства. Аналитическое задание движения

Движением пространства называется аффинное преобразование, заданное парой декартовых систем координат.

Так как в декартовой системе координат расстояние между точками вычисляется по формуле $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, а движение ставит в соответствие точки с одинаковыми координатами в декартовых системах координат, то движение сохраняет расстояние между точками.

Аффинное преобразование можно задать любой парой систем координат, поэтому, везде далее будем считать, что движение f задано парой декартовых систем (R, R'), в которой первая система координат R является правой. Будем говорить, что движение есть движение первого рода, если системы координат R и R' одинаково ориентированы и движением второго рода, если системы координат R и R' противоположно ориентированы.

Аналитическое задание движения. Пусть $R = (O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ декартова система координат. Пусть f - движение $M' = f(M)$, $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ в системе координат R. Выразим x', y', z' через x, y, z, - тем самым, получим аналитическое задание движения f в системе координат R.

■ Если $R' = (O', A', B', C')$ - образ R относительно f, то, по теореме 8.1, движение f можно задать парой R, R': если $M(x, y, z)$ в R, то $M'(x, y, z)$ в R'. Таким образом, точка $M'(x', y', z')$ в R и $M'(x, y, z)$ в R'. Из §6.4 получим:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z + x_0, \\ y' &= c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z + y_0, \\ z' &= c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z + z_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Матрица $C = (c_{ij})$ - ортогональная матрица. Поэтому $\det C = \pm 1$. ■

Лемма 7.2 *Отображение f пространства на себя, заданное в правой декартовой системе координат формулами вида (1), где $C = (c_{ij})$ - ортогональная матрица, есть движение. Если $\det C = 1$, то f - движение I рода, если $\det C = -1$, то f - движение II рода.*

Свойства движения. Так как движение является и аффинным преобразованием, то оно обладает всеми свойствами аффинного преобразования. Основным свойством движения является то, что движение сохраняет расстояние между точками. Из него вытекает, что движение переводит отрезок в равный ему отрезок, угол в равный ему угол, треугольник в равный ему треугольник и так далее.

Теорема 7.1 *Пусть $f, g \in D$. Если f, g есть движения I (II) рода, то $f \circ g$ есть движение I рода. Если f, g есть движения разных родов, то $f \circ g$ есть движение II рода.*

Теорема 7.2 *Аффинное преобразование пространства есть композиция движения пространства и трех сжатий к трем попарно перпендикулярным плоскостям.*

Доказательство этих теорем с небольшими изменениями повторяет доказательство теорем 5.1 и 5.2.

Следующая теорема 8.3 понадобится нам для классификации движений. Сначала введем одно отображение векторов пространства на себя и рассмотрим его свойство.

Пусть движение f задано в некоторой декартовой системе координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ формулами (1). Движение f порождает отображение $\underline{f'}$ множества векторов пространства на себя по следующему правилу: вектору $\overline{AB}$ ставится в соответствие вектор $\overline{A'B'}$, где A', B' есть образы точек A, B относительно f. Из формул (1) получим формулы, задающие отображение f' в базисе системы координат R:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z, \\ y' &= c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z, \\ z' &= c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z. \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 7.3 *Покажем, что отображение, заданное формулами вида (2) обладает следующим свойством: существует ненулевой вектор $\overline{a}(x,y,z)$, образом которого будет вектор вида $\overline{a}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, где число $\lambda \neq 0$.*

■ Действительно, координаты такого вектора должны удовлетворять системе уравнений вида:

$$\begin{cases} \lambda x = c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z, \\ \lambda y = c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z, \\ \lambda z = c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (c_{11} - \lambda)x + c_{21}y + c_{31}z = 0, \\ c_{12}x + (c_{22} - \lambda)y + c_{32}z = 0, \\ c_{13}x + c_{23}y + (c_{33} - \lambda)z = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Эта однородная система имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Приравняем определить (3) к нулю, получим $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, где $c = det(c_{ij}) \neq 0$. Такое уравнение имеет ненулевое действительное решение. Подставляя его в (3) и решая систему, найдем некоторое решение x, y, z. Тогда вектор $\overline{a}(x,y,z)$ будет удовлетворять условию леммы. ■

Теорема 7.3 *Пусть f - движение пространства. Существует правая декартова система координат, в которой движение f задается формулами вида:*

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - \varepsilon y \sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + \varepsilon y \cos\alpha + y_0, \\ z' &= \tau z + z_0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\varepsilon, \tau = \pm 1$. Если $\varepsilon\tau > 0$, то f - движение I рода, если $\varepsilon\tau < 0$, то f - движение II рода.

■ Пусть правая система координат R такая, что базисный вектор $\overline{k}(0,0,1)$ удовлетворяет условию леммы 8.3, то есть вектор $\overline{k}(0,0,1)$ есть решению системы (3). Подставляя координаты вектора $\overline{k}$ в (3), получим, что $c_{31} = c_{32} = 0$. Пусть $R' = (O', \overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'})$ - образ системы координат R относительно движения f. Так как вектор $\overline{k}(0,0,1)$ параллелен решению системы (3), то $\overline{k'} || \overline{k}$, следовательно, векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{i'}, \overline{j'}$ лежат в одной плоскости. Ориентируем эту плоскость вектором $\overline{k}$; тогда базис $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ этой плоскости будет правым (так как система координат R - правая). Так же, как и §3.2, можно показать, что $c_{11} = \cos\alpha$, $c_{12} = \varepsilon\sin\alpha$, $c_{12} = \sin\alpha$, $c_{22} = \varepsilon\cos\alpha$, где $\varepsilon = +1$, если базис $\{\overline{i'}, \overline{j'}\}$ - правый и $\varepsilon = -1$, в противном случае, $\alpha = \measuredangle(\overline{i}, \overline{i'})$. Формулы (1) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - \varepsilon y \sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + \varepsilon y \cos\alpha + y_0, \\ z' &= c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z + z_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как матрица коэффициентов в (5) ортогональна, то

$$\begin{cases} c_{13}\cos\alpha - c_{23}\varepsilon\sin\alpha = 0, \\ c_{13}\sin\alpha + c_{23}\varepsilon\cos\alpha = 0, \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $c_{13} = c_{23} = 0$, $c_{33} = \pm 1$. Поэтому формулы (5) примут вид (4).

Определитель D, составленный из коэффициентов при переменных в (4), равен $\varepsilon\tau$, поэтому (4) есть движение I рода, если $\varepsilon\tau > 0$ и II рода в противном случае (лемма 8.2). ■

7.4 Классификация движений пространства

Пусть движение пространства f задано в правой декартовой системе координат R следующими формулами:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + y_0, \\ z' &= \tau z + z_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon, \tau = \pm 1$.

Представим движение (1), как композицию двух движений $h_\tau \circ g_\varepsilon$, где

$$g_\varepsilon : \begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + y_0, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{2}$$

а

$$h_\tau : \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \tau z + z_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Первые две формулы в (2) задают движение в плоскости XOY, обозначим его ψ. Движение (3) при $\tau = 1$, то есть h_1, есть параллельный перенос на вектор $\overline{q}(0, 0, z_0)$, если $z_0 \neq 0$, и тождественное преобразование пространства, если $z_0 = 0$. Движение h_{-1}, есть симметрия пространства относительно плоскости $z = \frac{z_0}{2}$.

Классификация движений плоскости и формулы (1) позволяют дать классификацию движений пространства.

1). Пусть ψ есть движения плоскости I рода: $\varepsilon = +1$. По классификации движений плоскости ψ - либо тождественное преобразование, либо параллельный перенос, либо поворот плоскости. Рассмотрим эти случаи:

а) ψ - тождественное преобразование плоскости XOY.

Тогда g_1 - тождественное преобразование пространства. Поэтому, $h_1 \cdot g_1$ - **параллельный перенос** пространства ($z_0 \neq 0$) или **тождественное преобразование** пространства ($z_0 = 0$).

Движение $h_{-1} \circ g_1$ - **симметрия относительно плоскости** $z = \frac{z_0}{2}$.

б) ψ - параллельный перенос XOY на вектор $\overline{p}$.

Тогда g_1 - также параллельный перенос пространства на вектор $\overline{p}$. Поэтому $h_1 \circ g_1$ - параллельный перенос на вектор $\overline{p} + \overline{q}$, а $h_{-1} \circ g_1$ - композиция параллельно переноса на вектор $\overline{p}$ и симметрии относительно плоскости $\pi : z = \frac{z_0}{2}$, при этом $\overline{p}||\pi$. Такое движение пространства называется **скользящим отражением**.

в) ψ - поворот плоскости XOY. Пусть точка M_0 - центр поворота. Тогда g_1 - поворот пространства относительно прямой l, параллельной оси OZ и проходящей через M_0. Поэтому $h_1 \circ g_1$ - композиция поворота пространства около прямой l и параллельного переноса на вектор $\overline{q}||l$. Такое движение пространства называется **винтовым движением**.

Движение $h_{-1} \circ g_1$ - композиция поворота пространства около прямой l и симметрии относительно плоскости $z = \frac{z_0}{2}$, перпендикулярной прямой l. Такое движение пространства называется **поворотным отражением**.

2). Пусть ψ есть движения плоскости II рода: $\varepsilon = -1$.

По классификации движений плоскости ψ - либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия. Рассмотрим эти случаи:

а) ψ - осевая симметрия в плоскости XOY.

Пусть l - ось симметрии. Тогда g_{-1} - симметрия пространства относительно плоскости π, ортогональной XOY и проходящей через l. Поэтому $h_1 \circ g_{-1}$ - скользящее отражение относительно плоскости π, а $h_{-1} \circ g_{-1}$ - композиция симметрии относительно плоскости π и симметрии относительно плоскости $z = \frac{z_0}{2}$. Так как плоскости симметрии ортогональны, то данное движение есть **симметрия относительно прямой** - пересечения этих плоскостей.

в) ψ - скользящая симметрия плоскости XOY.

Пусть l - ось симметрии, вектор $\overline{p}$ -вектор симметрии. Тогда $g_{-1} = P_{\overline{p}} \circ S_\pi$, где S_π - отражение относительно плоскости π, ортогональной XOY и проходящей через l, $P_{\overline{p}}$ - параллельный перенос на вектор $\overline{p}$.

Движение $h_1 \circ g_{-1}$ - скользящее отражение относительно плоскости π, с вектором $\overline{p} + \overline{q}$.

Рассмотрим движение $h_{-1} \circ g_{-1}$. Так как $h_{-1} = S_{\pi_1}$ - симметрия относительно плоскости $\pi_1 : z = \frac{z_0}{2}$, то $h_{-1} \circ g_{-1} = S_{\pi_1} \circ (P_{\overline{p}} \circ S_\pi) = S_{\pi_1} \circ (S_\pi \circ P_{\overline{p}}) = (S_{\pi_1} \circ S_\pi) \circ P_{\overline{p}} = S_l \circ P_{\overline{p}}$, где S_l - симметрия относительно прямой l (плоскости π_1 и π перпендикулярны). Так как вектор $\overline{p}$ параллелен прямой l, то окончательно получаем: $h_{-1} \circ g_{-1}$ - винтовое движение.

Таким образом, движения пространства I рода ($\tau\varepsilon > 0$): тождественное преобразование, параллельный перенос, винтовое движение.

Движения пространства II рода ($\tau\varepsilon < 0$): симметрия относительно плоскости, поворотное отражение, скользящее отражение.

8 Поверхности второго порядка

В этой главе рассматриваются поверхности второго порядка, то есть множества, заданные в некоторой аффинной системе координат уравнением вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz+ \\ 2a_{23}yz + 2a_{41}x + 2a_{42}y + 2a_{43}z + a_{44} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где коэффициенты при произведениях переменных не все равны нулю.

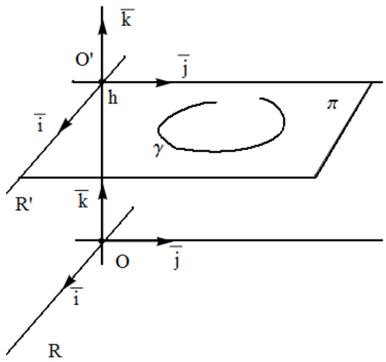
Первые параграфы посвящены изучению конкретных поверхностей второго порядка. Такие поверхности как цилиндры, конусы, поверхности вращения будут введены геометрическими определениями и затем будут выведены их уравнения, а поверхности - эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, будут сразу заданы уравнениями, а потом исследованы. Рассмотрены прямолинейные образующие поверхности второго порядка. Уравнение второго порядка приводится к каноническому виду, на основе которого дается классификация поверхностей второго порядка.

Пример. Сфера - поверхность второго порядка.

Аналитическое задание кривых в пространстве.

Этот пункт носит вспомогательный характер. Задание кривых в пространстве потребуется нам при определении некоторых поверхностей.

Пусть $R = (O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ - декартова система координат, π - плоскость, заданная уравнением $z = h$, h - действительное число.



Пусть подмножество γ, например, кривая второго порядка, принадлежит π. Точка O' имеет координаты $(0, 0, h)$. Возьмем декартову систему координат $R' = (O', \overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$. Пусть множество γ задано уравнением $F(x', y') = 0$ в системе координат $R'' = (O', \overline{i}, \overline{j})$. Тогда кривая γ в системе координат R' будет задана системой уравнений вида:

$$\begin{cases} F(x', y') = 0, \\ z' = 0. \end{cases}$$

Теперь напишем формулы преобразования координат для R и R' : $x = x'$, $y = y'$, $z = z' + h$. Отсюда получим уравнение γ в системе координат R:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z - h = 0. \end{cases}$$

Отметим, что ортогональная проекция множества γ на плоскость XOY будет задаваться уравнением $F(x, y) = 0$ в системе координат XOY.

8.1 Цилиндрические поверхности

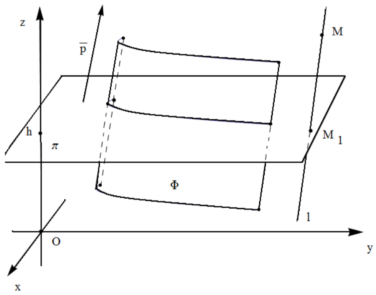
Пусть φ - подмножество пространства, например, кривая второго порядка, вектор $\overline{p} \neq \overline{0}$. Через каждую точку φ проведем прямую, параллельную вектору $\overline{p}$. Множество точек всех таких прямых называется цилиндрической поверхностью. При этом φ называется **направляющей** цилиндрической поверхности, а прямые, проходящие через точки φ параллельно $\overline{p}$ - **образующими** цилиндрической поверхности.

Возьмем декартову систему координат R. Напишем уравнение цилиндрической поверхности Φ с направляющей φ:

$$\begin{cases} G(x, y) = 0, \\ z - h = 0 \end{cases}$$

и образующими, параллельными вектору $\overline{p}(\alpha,\beta,\gamma)\neq\overline{0}$; здесь G - функция двух переменных, в частности, многочлен второго порядка, h - действительное число. Будем считать, что образующие Φ не параллельны плоскости $\pi: z-h=0$, то есть $\gamma\neq 0$.

■ Пусть $M(x,y,z)$ - произвольная точка пространства, проведем через нее прямую l, параллельную вектору $\overline{p}$. Пусть $M_1(x_1,y_1,z_1)=l\cap\pi$. Найдется t такое, что $\overline{MM_1}=t\overline{p}$. Отсюда получим: $x_1-x=t\alpha$, $y_1-y=t\beta$, $z_1-z=t\gamma$. Так как $z_1=h$, то из третьего уравнения получим, что $t=\frac{h-z}{\gamma}$. Найденное t подставим в первые два уравнения: $x_1=x+\alpha\frac{h-z}{\gamma}$, $y_1=y+\beta\frac{h-z}{\gamma}$. Таким образом, нашли координаты точки $M_1(x+\alpha\frac{h-z}{\gamma},y+\beta\frac{h-z}{\gamma},h)$. Отсюда получаем: $M(x,y,z)\in\Phi\iff M_1\in\varphi\iff$

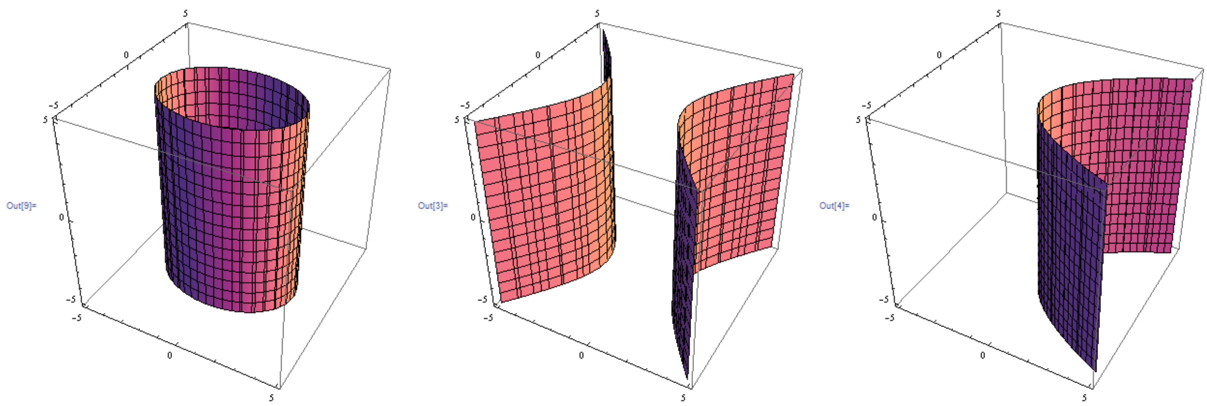


$$\begin{cases} G(x+\alpha\frac{h-z}{\gamma},y+\beta\frac{h-z}{\gamma})=0,\\ h-h=0.\end{cases}$$

Эта система равносильна уравнению:

$$G(x+\alpha\frac{h-z}{\gamma},y+\beta\frac{h-z}{\gamma})=0. \tag{1}$$

Таким образом, координаты точек поверхности Φ и только они удовлетворяют уравнению (1), следовательно, уравнение (1) есть уравнение такой цилиндрической поверхности. ■



Пример. Пусть φ - эллипс в плоскости $\pi=XOY$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$$

Напишем уравнение цилиндрической поверхности с направляющей φ и образующими, параллельными вектору $\overline{p}(0,0,1)$. Такая цилиндрическая поверхность называется эллиптическим цилиндром. ■ Для этого положим в (1): $h=0$, $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$. Так как $G(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$, то из (1) получаем следующее уравнение эллиптического цилиндра:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

При $a=12$, $b=8$ эллиптический цилиндр приведен на левом рисунке выше.

Заметим, что такое уравнение в плоскости XOY и в системе координат XOY задает эллипс.

Аналогично можно получить уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2=2p\,x$$

-гиперболический цилиндр (направляющая - гипербола в плоскости XOY) и параболический цилиндр (направляющая - парабола в плоскости XOY).

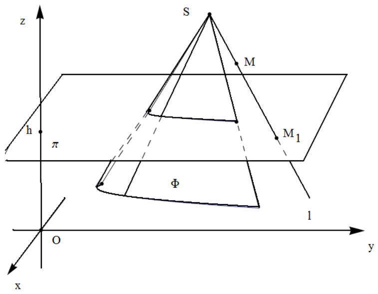
8.2 Конические поверхности

Пусть φ - множество точек пространства, например, кривая второго порядка, S - точка. Через точку S и точки φ проведем всевозможные прямые. Множество точек всех таких прямых называется конической поверхностью. При этом φ называется направляющей конической поверхности; прямые, проходящие через точки направляющей φ и точку S - образующими конической поверхности, а точка S называется вершиной конической поверхности.

Возьмем декартову систему координат R. Напишем уравнение конической поверхности Φ с направляющей φ :

$$\begin{cases} G(x,y)=0, \\ z-h=0 \end{cases}$$

и вершиной в точке $S(x_0,y_0,z_0)$, где G - функция двух переменных, в частности, многочлен второго порядка, h - действительное число. Будем считать, что вершина S поверхности Φ не лежит в плоскости $\pi : z-h=0$, то есть $z_0\neq h$. ■ Пусть точка $M(x,y,z)$ такая, что $z\neq z_0$, l - прямая, проходящая через точки M и S.



Пусть $M_1(x_1,y_1,z_1)=l\cap\pi$. Найдется t такое, что $\overline{SM_1}=t\overline{SM}$. Отсюда получим: $x_1-x_0=t(x-x_0)$, $y_1-y_0=t(y-y_0)$, $z_1-z_0=t(z-z_0)$. Так как $z_1=h$, то из третьего уравнения можно найти t: $t=\frac{h-z}{z-z_0}$, тогда из первых двух: $x_1=x_0+\frac{h-z_0}{z-z_0}(x-x_0)$, $y_1=y_0+\frac{h-z_0}{z-z_0}(y-y_0)$. Таким образом, $M_1(x_0+\frac{h-z_0}{z-z_0}(x-x_0),y_0+\frac{h-z_0}{z-z_0}(y-y_0),h)$. Отсюда получаем: $M(x,y,z)\in\Phi \iff M_1\in\varphi \iff$

$$\begin{cases} G(x_0+\frac{h-z_0}{z-z_0}(x-x_0),y_0+\frac{h-z_0}{z-z_0}(y-y_0))=0, \\ h-h=0. \end{cases}$$

Эта система равносильна уравнению:

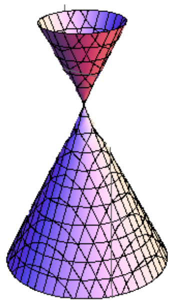
$$G(x_0+\frac{h-z_0}{z-z_0}(x-x_0),y_0+\frac{h-z_0}{z-z_0}(y-y_0))=0. \tag{1}$$

Таким образом, координаты точек поверхности Φ и только они удовлетворяют уравнению (1), следовательно, уравнение (1) есть уравнение такой конической поверхности. ■

Пример. Пусть φ - окружность в плоскости $z = h$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ z = h, \end{cases}$$

$h \neq 0$. Напишем уравнение конической поверхности с направляющей φ и вершиной S,



совпадающей с началом координат. Для этого, положим в (1) $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $h = 1$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, получим

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1.$$

Домножим обе части уравнения на на z^2 :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{2}$$

Решения двух последних уравнений отличаются одной точкой - началом координат.

Аналогично можно получить уравнения:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

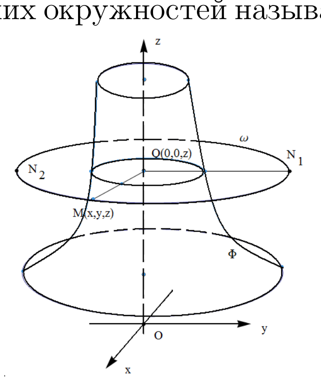
- уравнение конической поверхности, направляющая которой есть гипербола в плоскости $z = h$. Замена координат $x = z'$, $y = x'$, $z = y'$ приводит это уравнение к уравнению (2).

К уравнению (2) можно привести и уравнение конуса, направляющей которого является парабола в плоскости $z = h$.

Другими словами, основные кривые второго порядка такие, как эллипс, гипербола и парабола являются сечениями конуса соответствующими плоскостями.

8.3 Поверхности вращения

Пусть l - прямая, φ - множество точек, например, кривая второго порядка. Проведем через каждую точку φ окружность с центром на прямой l, так, чтобы плоскость, содержащая окружность, была перпендикулярна прямой l. Множество точек всех таких окружностей называется поверхностью вращения с осью вращения l. Пересечение



полуплоскости, ограниченной прямой l и поверхности вращения, называется меридианом поверхности вращения. Пересечение плоскости, перпендикулярной прямой l и поверхности вращения, называется параллелью поверхности вращения.

Возьмем декартову систему координат R. Напишем уравнение поверхности вращения Φ с осью $l = OZ$ и меридианом φ, лежащим в плоскости YOZ и заданным в системе координат YOZ уравнением: $y = f(z)$. Меридиан можно задать и уравнением $G(y, z) = 0$, но, при этом, будем считать, что меридиан лежит в полуплоскости $y \geqslant 0$ (или $y \leqslant 0$) координатной плоскости YOZ.

■ Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка пространства. Пусть ω - окружность, содержащая точку $M(x, y, z)$, с центром Q на оси OZ и плоскостью окружности перпендикулярной оси OZ. Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности, то ω - параллель поверхности вращения Φ. Пусть окружность ω пересекает плоскость YOZ в двух точках N_1 и N_2. Так как $MQ = \sqrt{x^2 + y^2}$, $MQ = QN_1 = QN_2$ - радиус окружности ω, то $N_1(0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$, $N_2(0, -\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ с точностью до обозначения. Пусть $M \in \Phi$, тогда либо $N_1 \in \varphi$, либо $N_2 \in \varphi$ по определению поверхности вращения. Поэтому, либо $\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$, либо $-\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$. Отсюда получаем:

$$x^2 + y^2 = f^2(z). \tag{1}$$

Если $M \notin \Phi$, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (1), так как ни одна из точек N_1, N_2 не лежит на меридиане φ.

Если меридиан задан уравнением $G(y, z) = 0$, то получаем следующее уравнение поверхности вращения:

$$G(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{2}$$

При этом, выбирается "+", если меридиан лежит в полуплоскости $y \geqslant 0$ координатной плоскости YOZ. В этом случае на меридиане лежат точки N_1. Берется знак "-", если меридиан лежит в полуплоскости $y \leqslant 0$. Если меридиан пересекает ось OZ, то его надо разбить на части, каждая из которых принадлежит нужной полуплоскости и рассматривать отдельно каждую часть. ■

Аналогично можно написать уравнение поверхности вращения с тем же меридианом φ, лежащим в плоскости YOZ и осью вращения OY: $x^2 + z^2 = f^2(y)$ или $G(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$, если меридиан задан уравнением $G(y, z) = 0$.

Пример. Возьмем в плоскости YOZ эллипс $\varphi : \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. Напишем уравнение поверхности вращения с меридианом φ и осью вращения OZ. Если обозначить $G(y, z) = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1$, то из (2) получаем:

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Поверхность, заданная таким уравнением, называется эллипсоидом вращения.

Заменим в этом примере эллипс на гиперболу φ: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$. Вращая гиперболу около оси OZ, получим поверхность, которая называется однополостный гиперболоид вращения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

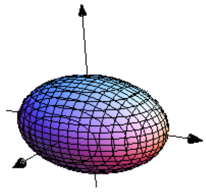
А при вращении этой же гиперболы около оси OY получим поверхность с названием двуполостный гиперболоид вращения:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

8.4 Эллипсоид

Эллипсоидом называется множество точек, заданное в некоторой декартовой системе координат уравнением вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (1)$$



числа a, b, c, - называются полуосями эллипсоида.

Любой эллипсоид получается из сферы равномерным сжатием относительно двух перпендикулярных плоскостей (§8.2). Так, сжимая сферу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

к плоскости XOY с коэффициентом сжатия $\frac{c}{a}$ (то есть, совершив преобразование пространства вида: $x' = x,\ y' = y,\ z' = \frac{c}{a}z$) и к плоскости XOZ с коэффициентом сжатия $\frac{b}{a}$ (преобразование вида: $x' = x,\ y' = \frac{b}{a}y,\ z' = z$) получим эллипсоид (1).

Для исследования поверхностей, заданных уравнением, обычно применяется метод сечений: рассматривают сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Анализ таких сечений позволит узнать форму поверхности.

Лемма 8.1 *Пусть поверхность F задана уравнением $G(x, y, z) = 0$; плоскость π: $z = h$, параллельная координатной плоскости XOY. Пусть множество φ' есть ортогональная проекция сечения $\varphi = F \cap \pi$ на плоскость XOY. Тогда $G(x, y, h) = 0$ - уравнение φ' в системе координат XOY.*

■ Пусть точка $M(x, y, h) \in \pi$, M' - ортогональная проекция точки на плоскость XOY. Тогда M' имеет координаты x, y в системе координат XOY. Так как

$$\begin{cases} G(x, y, z) = 0, \\ z - h = 0 \end{cases}$$

- уравнение сечения φ, то можно записать: $M' \in \varphi' \iff M \in \varphi \iff$

$$\begin{cases} G(x, y, h) = 0, \\ h - h = 0 \end{cases} \iff G(x, y, h) = 0.$$

Таким образом, $G(x, y, h) = 0$ - уравнение φ' в системе координат XOY.■

Свойства эллипсоида.

Эллипсоид симметричен относительно всех элементов системы координат.

Рассмотрим пересечение эллипсоида с плоскостями $z = h$, где h - произвольное число. По лемме 9.1 проекции таких сечений на плоскость XOY в системе координат XOY заданы уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \qquad (2)$$

Рассмотрим случаи:

а) $1-\frac{h^2}{c^2}>0$ или $-c<h<c$. Тогда уравнение (2) есть уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})^2}=1.$$

Плоскости $z=h$, $-c<h<c$, пересекают эллипсоид по эллипсам. Если $a=b$, то уравнения (2) есть уравнение окружности, эллипсоид в этом случае есть эллипсоид вращения.

б) $1-\frac{h^2}{c^2}=0$ или $h=\pm c$. Уравнение (2) имеет в этом случае одно решение: $x=y=0$. Следовательно, плоскости $z=\pm c$ пересекают эллипсоид в точках с координатами $(0,0,\pm c)$.

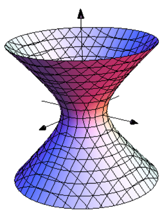
в) $1-\frac{h^2}{c^2}<0$ или $h>c$, $h<-c$. Уравнение (2) не имеет решений, плоскости $z=h$, $h>c$ или $h<-c$, не пересекают эллипсоид.

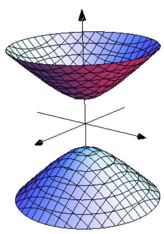
Аналогично рассматриваются пересечения эллипсоида плоскостями, параллельными плоскостям XOZ, YOZ.

8.5 Гиперболоиды

Однополостным (двуполостным) гиперболоидом называется множество точек, заданное в некоторой декартовой системе координат уравнением вида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1).$$





Эти поверхности можно получить из соответствующих поверхностей вращения равномерным сжатием к координатным плоскостям.

Свойства гиперболоидов.

Гиперболоиды симметричны относительно всех элементов системы координат.

Рассмотрим пересечение однополостного гиперболоида плоскостями $z=h$, h-произвольное число (аналогично рассматриваются сечения двуполостных гиперболоидов). Проекция такого сечения на плоскость XOY в системе координат XOY, в силу леммы 9.1, задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

При всех значениях h такое уравнение задает эллипс (левый рисунок).

Рассмотрим пересечение однополостного гиперболоида с плоскостями $x=h$, h - произвольное число.

Уравнение ортогональных проекции таких сечений на плоскость YOZ в системе координат YOZ:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}. \tag{1}$$

Посмотрим, как меняются сечения при изменении h:

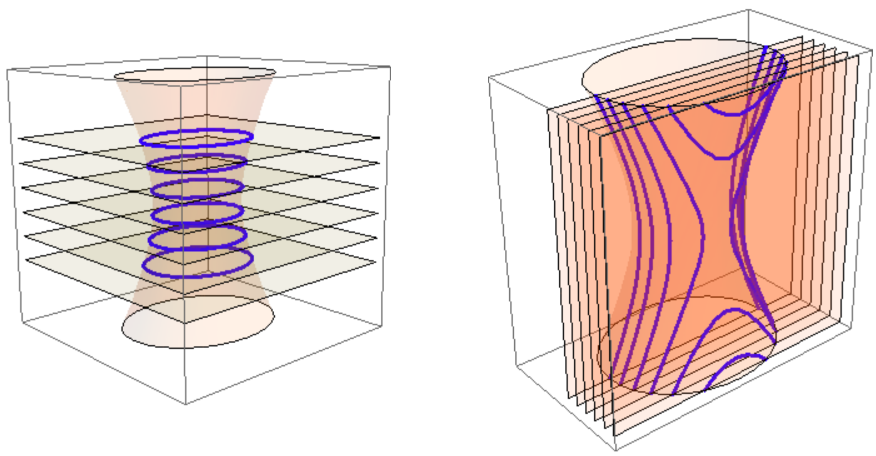
а) $1 - \frac{h^2}{a^2} > 0$ или $-a < h < a$. Уравнение (1) есть уравнение гиперболы с мнимой осью OZ :

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}})^2} - \frac{z^2}{(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}})^2} = 1.$$

б) $1 - \frac{h^2}{a^2} = 0$ или $h = \pm a$. Уравнения (1) есть уравнение двух пересекающихся прямых.

в) Если $1 - \frac{h^2}{c^2} < 0$ или $-a > h, h > a$. Уравнение (1) есть уравнение гиперболы с мнимой осью OY:

$$\frac{z^2}{(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}})^2} = 1.$$



Аналогично рассматриваются пересечения гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости XOZ.

Рассмотрим пересечение $F \cap l$ однополостного гиперболоида F и прямой l, проходящей через начало координат: $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $z = \gamma t$, вектор $\overline{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$ - направляющий вектор прямой l. Множество $F \cap l$ задается системой уравнений, состоящей из уравнения поверхности F и уравнения прямой. Для решения системы, подставим x, y, z из уравнения прямой в уравнение поверхности, в результате получим уравнение для определения значений параметра t, соответствующих точкам пересечения:

$$t^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right) = 1. \tag{2}$$

Обозначим через δ выражение в скобках в уравнении (3) и рассмотрим три случая:

а) $\delta = 0$. Уравнение (2) не имеет решений (ни действительных, ни мнимых), то есть прямые l не пересекают гиперболоид. Пусть K множество точек всех таких прямых. Точка $M(x, y, z)$, не совпадающая с началом координат, принадлежит K тогда и только тогда, когда прямая $(OM) \subset K$. Вектор $\overline{OM}(x, y, z)$ - направляющий вектор прямой (OM), поэтому его координаты удовлетворяют уравнению $\delta = 0$, то есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- это уравнение конуса с вершиной в точке O. Конус K называется асимптотическим конусом гиперболоида F.

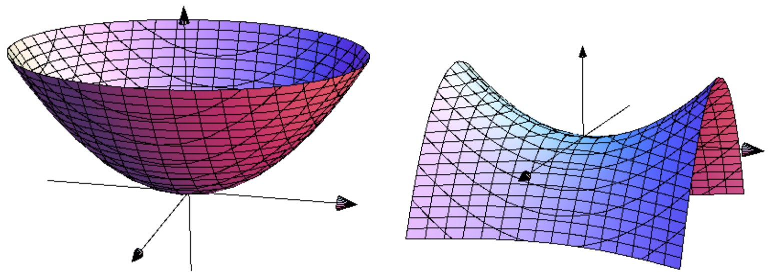
б) $\delta > 0$. Уравнение (2) имеет два решения: $t = \pm\frac{1}{\sqrt{\delta}}$; прямая l пересекает гиперболоид в двух симметричных относительно начала координат точках.

в) $\delta < 0$. Уравнение (2) не имеет действительных решений (но есть мнимые решения). Прямая l не пересекает гиперболоид.

8.6 Параболоиды

Эллиптическим (гиперболическим) параболоидом называется множество точек, заданное в некоторой декартовой системе координат уравнением вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \qquad (\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z).$$



Параболоиды симметричны относительно оси OZ и координатных плоскостей XOZ и YOZ. Эллиптический параболоид относительно просто устроен: его сечения плоскостями $z = h$ являются эллипсы при $h > 0$, точка O, при $h = 0$ и пустое множество при $h < 0$. Плоскости, параллельные координатным плоскостям XOZ, YOZ, пересекают эллиптический параболоид по параболам, ветви которых направлены вверх (в полупространство $z > 0$).

Рассмотрим пересечение гиперболического параболоида с плоскостями $z = h$, h - произвольное число. Проекция φ такого сечения на плоскость XOY в системе координат XOY задается уравнением:

$$\varphi : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h.$$

При $h = 0$ множество φ есть две пересекающиеся прямые, при $h \neq 0$ проекции φ есть гиперболы, причем мнимые оси гипербол, у которых h разного знака, перпендикулярны. Пересечение гиперболического параболоида плоскостями $x = h$, есть параболы, ортогональные проекции которых на плоскость YOZ задаются следующим уравнением:

$$z - \frac{h^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}.$$

Ветви парабол, заданных такими уравнениями, направлены вверх. Пересечение параболоида с плоскостями $y = h$ есть параболы, ветви которых направлены вниз.

Параболоиды можно построить следующим образом: перемещать вершину одной параболы вдоль другой так, чтобы первая парабола смещалась параллельно самой себе. При этом, если ветви этих парабол направлены в разные стороны, то получим гиперболический параболоид, а если в одну сторону, то эллиптический параболоид.

8.7 Прямолинейные образующие поверхности второго порядка

Прямолинейной образующей поверхности называется прямая, каждая точка которой принадлежит поверхности.

Прямолинейные образующие есть на цилиндрических и конических поверхностях. Этим свойством обладают также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Действительно, каждая прямая, заданная уравнением

$$z = \lambda(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}), \quad 1 = \frac{1}{\lambda}(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}), \tag{1}$$

лежит на гиперболическом параболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \tag{2}$$

так как каждая точка (x, y, z), удовлетворяющая уравнению (1), удовлетворяет уравнению (2), которое получается из (1) почленным перемножением частей уравнения.

На гиперболическом параболоиде есть еще одно семейство прямолинейных образующих:

$$z = \lambda(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}), \quad 1 = \frac{1}{\lambda}(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}).$$

Аналогично: на однополостном гиперболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

также располагаются два семейства прямолинейных образующих:

$$l_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda(1 - \frac{y}{b}), \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda(1 + \frac{y}{b}), \end{cases} \qquad m_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda(1 + \frac{y}{b}), \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda(1 - \frac{y}{b}). \end{cases}$$

В обоих случаях прямолинейные образующие обладают следующими свойствами: прямолинейные образующие одного семейства не пересекаются, прямолинейные образующие разных семейств пересекаются; через каждую точку поверхности проходит по одной прямой каждого семейства.

Наличие прямолинейных образующих на гиперболическом параболоиде и однополостном гиперболоиде позволяет дать новый способ построения этих поверхностей. Именно, возьмем три прямолинейные образующие одного семейства: l_1, l_2, l_3. Тогда каждая прямолинейная образующая l второго семейства пересекает эти три прямые. Следовательно, поверхность есть объединение всех прямых, пересекающих три данные прямые l_1, l_2, l_3.

Однополостный гиперболоид вращения можно получить вращением любой своей прямолинейной образующей около оси поверхности.

8.8 Квадратичные формы

Квадратичной формой переменных x, y, z называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz. \qquad (1)$$

Сделаем замену переменных в квадратичной форме по формулам:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда (1) примет вид

$$a_{11}(c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z')^2 + a_{22}(c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z')^2 + ... \qquad (3)$$

Существует ли замена, при которой форма (3) имела бы наиболее простой вид, называемый каноническим видом квадратичной формы:

$$b_1x'^2 + b_2y'^2 + b_3z'^2?$$

Теорема 8.1 *Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду.*

■ Пусть R_1 - декартова система координат, φ - квадратичная форма. Пусть S - сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Будем рассматривать φ только для точек S (то есть сужение φ на сферу). Пусть функция φ на сфере S достигает максимума в точке $A_0 \in S$. Пусть R_2 - декартова система координат с тем же центром, что и у R_1, положительная полуось оси абсцисс которой проходит через точку A_0. Пусть в системе координат R_2 форма $\varphi = \varphi(x, y, z)$, где $\varphi(x, y, z)$ имеет вид (1). Так как точка A_0 имеет координаты $(1, 0, 0)$ в системе координат R_2, то $\varphi(1, 0, 0) = a_{11}$ - наибольшее значение формы φ на сфере. Покажем, что в (1) коэффициент $a_{12} = 0$ и $a_{13} = 0$. Докажем первое равенство, второе доказывается аналогично. Предположим противное $a_{12} \neq 0$ в (1). Будем рассматривать точки сферы, у которых координата $z = 0$, $x > 0$, а $|y| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и координата y имеет одинаковый знак с a_{12}. Для таких точек

$$\varphi(x, y, 0) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy.$$

Так как $x^2 + y^2 = 1$, то $x = \sqrt{1 - y^2} > \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} > \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\varphi(x, y, 0) = a_{11}(1 - y^2) + a_{22}y^2 + 2a_{12}y\sqrt{1 - y^2} > a_{11} + (a_{22} - a_{11})y^2 + a_{12}y.$$

Так как $a_{12}y \geqslant 0$, то выбирая y достаточно малым, можно считать, что $(a_{22} - a_{11})y^2 + a_{12}y > 0$. Отсюда получаем, что $\varphi(x, y, 0) > a_{11}$, что противоречит предположению.

Таким образом, в системе координат R_2 форма $\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz$. Пусть R - декартова система координат, полученная из системы координат R_2 поворотом R_2 около оси OX на некоторый угол α. Формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y'\cos\alpha - z'\sin\alpha, \\ z = y'\sin\alpha + z'\cos\alpha. \end{cases}$$

Подбирая соответствующим образом α, так как это было сделано в §4.5, получим, что в системе координат R квадратичная форма будет иметь канонический вид:

$$\varphi = b_1 x'^2 + b_2 y'^2 + b_3 z'^2. \blacksquare$$

Замечание. Системы координат в теореме декартовы. Если рассматривать аффинные системы координат, то любая квадратичная форма приводится к каноническому виду с помощью выделения полных квадратов.

Пример. Пусть поверхность второго порядка F задана в некоторой декартовой системе координат R уравнением вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz+ \\ a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Найдем декартову систему координат R', в которой уравнение поверхности F не содержало бы произведения разных координат - xy, yz, xz. Можно сделать так, как предложено в доказательстве теоремы - рассмотреть сужение квадратичной формы $\varphi(x, y, z)$ в (4) на сферу, найти максимальное значение такого сужения, взять новую систему координат, ось которой проходит через точку максимума. В такой системе координат квадратичная форма будет содержать только одно слагаемое с произведением разных координат. Наконец, поворот новой системы координат около оси приведет форму к каноническому виду, а уравнение (4) к виду, не содержащему произведения координат[1].

Рассмотрим более простой путь, не требующий знания материала старших курсов.

Возьмем формулы пересчета координат для декартовых систем координат R и R', содержащие углы Эйлера, запишем уравнение поверхности в новой системе координат R' и приравняем к нулю коэффициенты при произведении разных координат. Получим три уравнение на три неизвестных угла Эйлера. Решать такую систему можно только приближенными методами. Найденные углы определят декартову систему координат, в которой уравнение поверхности не будет содержать произведения разных координат. Покажем как это сделать в системе Mathematica на конкретном примере.

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением (4) со следующими коэффициентами:

In[1]:= $\mathbf{a_{11} = 5; a_{22} = 2; a_{33} = -5; a_{12} = -2; a_{13} = -6; a_{23} = -2;}$
$\mathbf{a_{03} = 0; a_{02} = 0; a_{01} = 0; a_{00} = -24;}$

Запишем уравнение поверхности в новой системе координат R'. Для этого осуществим подстановку (команда "/.") вместо неизвестных x, y, z в (4) - правые части формул пересчета координат с помощью углов Эйлера. При этом, штрихи, различающие переменные в старой и новой системах координат, писать не будем.

In[2]:= $\mathbf{q = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}x\,y + a_{13}x\,z + a_{23}y\,z + a_{01}x +}$
$\mathbf{a_{02}y + a_{03}z + a_{00}/.}$

[1]Можно привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью собственных значений матрицы квадратичной формы.

$\{\mathbf{x \to (Cos[u]Cos[v] - Sin[u]Sin[v]Cos[w])x+}$
$\mathbf{(-Sin[v]Cos[u] - Sin[u]Cos[v]Cos[w])y + Sin[u]Sin[w]z,}$
$\mathbf{y \to (Sin[u]Cos[v] + Cos[u]Sin[v]Cos[w])x+}$
$\mathbf{(-Sin[u]Sin[v] + Cos[u]Cos[v]Cos[w])y - Cos[u]Sin[w]z,}$
$\mathbf{z \to (Sin[v]Sin[w])x + (Sin[w]Cos[v])y + Cos[w]z}\};$

Левая часть нового уравнения поверхности обозначена переменной q. Найдем коэффициенты многочлена q при произведении разных координат. Например, коэффициент при произведении $x\ y$ равен половине второй смешанной производной q по x, y. Приравняем каждый коэффициент к нулю и получим систему уравнений относительно углов Эйлера.

In[3]:= $\mathbf{eq = \{D[q, x, y] == 0, D[q, x, z] == 0, D[q, y, z] == 0\};}$

Для просмотра системы можно убрать точку с запятой в конце этой команды. Решить такую систему можно численными методами.

Очистим переменные перед нахождением решений, решим систему и присвоим переменным u, v, w найденное решение.

In[4]:= $\mathbf{Clear[u, v, w];}$
$\mathbf{e = FindRoot[eq, \{\{u, 0\}, \{v, 1\}, \{w, 2\}\}];}$
$\mathbf{\{u, v, w\} = \{u, v, w\}/.e;}$

Теперь запишем уравнение поверхности в новой системе координат. В уравнение поверхности q автоматически будут подставлены найденные значения углов Эйлера.

In[5]:= **Print["Уравнение поверхности : ",**
(q//Expand//Fullsimplify//Chop), " = 0"];

Уравнение поверхности:
$5.95774x^2 - 6.49456x - 6.02074y^2 + 2.063z^2 - 7.5284y - 6.49184z - 24. = 0.$

Новое уравнение поверхности не содержит произведения координат.

Отметим, что обобщенные углы Эйлера позволяют распространить этот метод на все размерности.

8.9 Классификация поверхностей второго порядка

Пусть поверхность второго порядка F задана в некоторой декартовой системе координат R уравнением вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz+$$
$$2a_{23}yz + 2a_{41}x + 2a_{42}y + 2a_{43}z + a_{44} = 0.$$

Первые шесть слагаемых образуют квадратичную форму, обозначим ее φ. Пусть R' - декартова система координат в которой форма φ имеет канонический вид: $b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2$ (штрих опущен). Тогда поверхность F в системе координат R' будет задана уравнением вида:

$$b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 + 2b_{14}x + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44} = 0, \tag{1}$$

где b_1, b_2, b_3 не обращаются одновременно в нуль, так как переход к новой системе координат не может изменить порядок многочлена (обобщение теоремы 3.2).

Рассмотрим случаи:

1). Пусть в уравнении (1) все коэффициенты b_1, b_2, b_3 отличны от нуля. Выделяя полные квадраты, приведем уравнение (1) к виду:

$$b_1(x^2+2\frac{b_{14}}{b_1}x+(\frac{b_{14}}{b_1})^2)-\frac{b_{14}^2}{b_1}+b_2(y^2+2\frac{b_{24}}{b_2}y+(\frac{b_{24}}{b_2})^2)-\frac{b_{24}^2}{b_2}+$$

$$+b_3(z^2+2\frac{b_{34}}{b_3}z+(\frac{b_{34}}{b_3})^2)-\frac{b_{34}^2}{b_3}+b_{44}=0.$$

или

$$b_1(x+\frac{b_{14}}{b_1})^2+b_2(y+\frac{b_{24}}{b_2})^2+b_3(z+\frac{b_{34}}{b_3})^2+b'_{44}=0,$$

Сделаем замену переменных по формулам: $x'=x+\frac{b_{14}}{b_1}$, $y'=y+\frac{b_{24}}{b_2}$, $z'=z+\frac{b_{34}}{b_3}$, получим

$$b_1x^2+b_2y^2+b_3z^2+b_{44}=0 \tag{2}$$

(штрих опущен). Уравнение (2) есть уравнение поверхности F в системе координат, полученной из R' переносом начала координат в точку $(-\frac{b_{14}}{b_1}, -\frac{b_{24}}{b_2}, -\frac{b_{34}}{b_3})$.

Если в (2) коэффициент $b_{44}\neq 0$, то, учитывая возможные знаки коэффициентов и вводя соответствующие обозначения, (2) можно привести к одному из уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- **эллипсоид**,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- эта поверхность называется **мнимым эллипсоидом**,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

- **однополостный гиперболоид**,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

- **двуполостный гиперболоид**.

Если в (2) $b_{44}=0$, то, уравнение (2) может быть таким:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

-поверхность называется **мнимым конусом**, или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

- **конус**.

2). Пусть в уравнении (1) коэффициенты $b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$, $b_3=0$. Выделяя полные квадраты, приведем уравнение (1) к виду:

$$b_1x^2+b_2y^2+2b_{34}z+b_{44}=0 \tag{3}$$

(штрих опущен).

Допустим, что в уравнении (3) коэффициент $b_{34} \neq 0$. Перепишем уравнение (3) так

$$b_1x^2 + b_2y^2 + 2b_{34}(z + \frac{b_{44}}{2b_{34}}) = 0.$$

Перенесем начало системы координат в точку с координатами $(0, 0, -\frac{b_{44}}{2b_{34}})$. В полученной системе координат уравнение поверхности примет вид:

$$b_1x^2 + b_2y^2 + 2b_{34}z = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4), в зависимости от знаков коэффициентов, может быть таким:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

- **эллиптический параболоид**, или таким:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

- **гиперболический параболоид**. Остальные варианты знаков коэффициентов ни к чему новому не приводят. Например, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -z$$

после замены переменных вида $x = x'$, $y = y'$, $z = -z'$ приводится к уравнению эллиптического параболоида.

Пусть теперь в уравнении (3) коэффициент $b_{34} = 0$, тогда уравнение (3) примет вид:

$$b_1x^2 + b_2y^2 + b_{44} = 0. \qquad (5)$$

Если $b_{44} \neq 0$, то (5) можно привести к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- **эллиптический цилиндр**, или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- **гиперболический цилиндр**, или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

-эта поверхность называется **мнимый цилиндр**. Если $b_{44} = 0$, то (5) можно привести к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

- **две мнимые пересекающиеся плоскости**, или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

- **две действительные пересекающиеся плоскости**.

3). Пусть в уравнении (1) коэффициенты $b_1 \neq 0$, $b_2 = b_3 = 0$ (случаи $b_2 \neq 0$, $b_1 = b_3 = 0$ и $b_3 \neq 0$, $b_1 = b_2 = 0$ после переобозначения осей приводят к такому же результату). Выделяя полные квадраты, приведем уравнение (1) к виду:

$$b_1x^2 + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44} = 0 \qquad (6).$$

(штрих опущен).

Допустим, что в уравнении (6) коэффициент $b_{24} \neq 0$, $b_{34} \neq 0$. Сделаем замену переменных в (6) по формулам: $x' = x$, $y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha$, $z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha$, где

$$\cos\alpha = \frac{b_{24}}{\sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{b_{34}}{\sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}}.$$

Тогда

$$b_{24}y + b_{34}z = \sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2} \cdot (\frac{b_{24}}{\sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}}y + \frac{b_{34}}{\sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}}z) = \sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}y'.$$

Поэтому в новых переменны уравнение (6) примет вид (штрих опущен):

$$b_1x^2 + 2\sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}y + b_{44} = 0$$

или

$$b_1x^2 + 2\sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}(y + \frac{b_{44}}{2\sqrt{b_{24}^2 + b_{34}^2}}) = 0.$$

Перенесем начало координат в точку $(0, -\frac{b_{44}}{2\sqrt{b_{24}^2+b_{34}^2}}, 0)$ и обозначим через $p = \pm\frac{\sqrt{b_{24}^2+b_{34}^2}}{b_1}$. В новых переменных уравнение поверхности примет вид:

$$x^2 = 2py \qquad (7)$$

- **параболический цилиндр**.

Допустим, что в уравнении (6) коэффициент $b_{24} \neq 0$, $b_{34} = 0$ (случай $b_{24} = 0$, $b_{34} \neq 0$ после переобозначения осей приводит к такому же результату). Уравнение (6) приводится к виду:

$$b_1x^2 + 2b_{24}(y + \frac{b_{44}}{2b_{24}}) = 0,$$

а после замены переменных к виду (7).

Пусть в уравнении (6) коэффициент $b_{24} = 0$, $b_{34} = 0$. Уравнение (6) примет вид:

$$b_1x^2 + b_{44} = 0. \qquad (8)$$

Если $b_{44} \neq 0$, то (8) приводится к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

- **две параллельные действительные плоскости**, или к виду

$$\frac{x^2}{a^2} = -1$$

- **две параллельные мнимые плоскости**. Если $b_{44} = 0$, то (8) приводится к виду:

$$x^2 = 0$$

- **две совпавшие действительные плоскости**.

Таким образом, в пространстве существует 17 видов поверхностей второго порядка.

9 Многомерные пространства

9.1 Линейное векторное пространство

Пусть V - множество, его элементы $\overline{a}, \overline{b}, ...$ будем называть векторами. Множество V назовем **векторным пространством** (над полем действительными чисел R), если в V определено сложение векторов: $\overline{a}, \overline{b} \in V \to \overline{a}+\overline{b} \in V$ и умножение вектора на действительное число $\lambda \in R : \overline{a} \in V \to \lambda \cdot \overline{a}$ так, что для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in R$ выполняются следующие равенства (аксиомы векторного пространства):

1). $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

2). $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$.

3). Существует вектор $\overline{0} \in V$ такой, что $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$. Вектор $\overline{0}$ называется нулевым вектором.

4). Для любого вектора $\overline{a}$ найдется вектор $\overline{b}$ такой, что $\overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$. Вектор $\overline{b}$ обозначается $-\overline{a}$ и называется противоположным вектором вектору $\overline{a}$.

5). $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

6). $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$.

7). $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$.

8). $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$.

Свойства 1) - 4) показывают, что V - коммутативная группа. Можно доказать, что ноль-вектор единствен, а для данного вектора существует единственный противоположный вектор.

Отметим еще два свойства. Для любого вектора $\overline{a}$:

$0\overline{a} = \overline{0}$. ■ $0\overline{a} + \overline{a} = 0\overline{a} + 1\overline{a} = (0 + 1)\overline{a} = 1\overline{a} = \overline{a}$. ■

$(-1)\overline{a} = -\overline{a}$. ■ $(-1)\overline{a} + \overline{a} = (-1)\overline{a} + 1\overline{a} = (-1 + 1)\overline{a} = 0\overline{a} = \overline{0}$. ■

Примеры. 1). Пусть V - множество всех векторов плоскости (§2.1). На множестве V определено сложение векторов (правило треугольника) и умножение вектора на число. Эти операции обладают свойствами 1)-8) векторного пространства.

2). Пусть на множестве

$$V = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in R\}$$

определены операции правилами:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a_1 & b + b_1 \\ c + c_1 & d + d_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Тогда V - векторное пространство.

3). Множество V всех непрерывных функций, определенных на интервале $[a, b]$, является векторным пространством относительно операций: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Аксиома размерности.

Определения линейной зависимости и независимости векторов векторного пространства совпадает с определениями §2.3.

Пусть векторное пространство V обладает следующим свойством (аксиома размерности):

Существует n линейно независимых векторов. Любой набор из $n+1$ векторов линейно зависим.

Число n называется размерностью векторного пространства V и обозначается так: $n = \dim V$, при этом пространство V называется n-мерным векторным пространством.

Если в векторном пространстве аксиома размерности не выполняется ни при каком n, то векторное пространство называется бесконечномерным.

Например, векторное пространство из примера 2) имеет размерность 4. Действительно, векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы и для любого вектора

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

можно записать:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть $\overline{a} = a\overline{e}_1 + b\overline{e}_2 + c\overline{e}_3 + d\overline{e}_4$, следовательно, векторы $\overline{a}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4$ - линейно зависимы. Аксиома размерности выполняется при $n = 4$.

Векторное пространство из примера 3 бесконечномерное. Покажем, что функции $1, x, x^2, ..., x^n$ линейно независимы для любого n. Предположим противное - существую числа λ_0, $\lambda_1, ...,$ λ_n, не равные одновременно нулю, такие, что $\lambda_0 + x\lambda_1 + x^2\lambda_2 + ... + x^n\lambda_n = 0$ для всех значений $x \in [a, b]$. Но, это противоречит основной теореме теории многочленов - число действительных корней многочлена степени степени n не больше n.

Базис. Координаты вектора.

Пусть V^n - n-мерное векторное пространство. Упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2, ...,$ $\overline{e}_n$ называется базисом векторного пространства V^n. Обозначение базиса: $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$.

Пусть $\overline{a} \in V^n$, тогда совокупность $n+1$ векторов $\overline{a}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ линейно зависима, то есть, существуют не равные одновременно нулю числа λ_0, $\lambda_1, ...,$ λ_n такие, что $\lambda_0\overline{a} + \lambda_1\overline{e}_1 + ...\lambda_n\overline{e}_n = \overline{0}$. Ясно, что $\lambda_0 \neq 0$, в противном случае базисные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ были бы линейно зависимы. Тогда

$$\overline{a} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\overline{e}_1 + ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\overline{e}_n.$$

Таким образом, доказано, что для любого вектора $\overline{a} \in V^n$ существуют числа x_1, $x_2, ..., x_n$ такие, что

$$\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + .. + x_n\overline{e}_n.$$

Упорядоченный набор чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется координатами вектора $\overline{a} \in V^n$. Координаты вектора определяются вектором однозначно. Обозначение: $\overline{a}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

На n-мерный случай без труда обобщается теорема о координатах линейной комбинации векторов.

Подпространства.

Подмножество $W \subset V$ называется подпространством векторного пространства V, если W является векторным пространством относительно тех же операций. Ясно, что $\dim W \leqslant \dim V$.

Теорема 9.1 *Пусть W - подмножество векторного пространства V такое, что*

1). Для любых векторов $\overline{a}, \overline{b} \in W$, вектор $\overline{a} + \overline{b} \in W$.

2). Для любого вектора $\overline{a} \in W$ и любого числа $\lambda \in R$, вектор $\lambda\overline{a} \in W$.

Тогда W - подпространство векторного пространства V.

■ Заметим, что $\overline{0} \in W$ и $\forall \overline{a} \in W$, $-\overline{a} \in W$. Действительно, $-\overline{a} = (-1)\overline{a} \in W$ в силу 2) условия теоремы. Отсюда и из условия 1): $\overline{0} = \overline{a} + (-\overline{a}) \in W$. Теперь легко проверить выполнимость аксиом векторного пространства для W.■

Примеры. Пусть V - векторное пространство, $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a_k} \in V$. Тогда множество $W = \{\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_k\overline{a_k} | \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k \in R\}$ - подпространство векторного пространства V.

■ Пусть $\overline{p}, \overline{q} \in W$. Тогда можно написать $\overline{p} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_k\overline{a_k}$, $\overline{q} = \lambda_1'\overline{a}_1 + \lambda_2'\overline{a}_2 + ... + \lambda_k'\overline{a_k}$. Отсюда получим: $\overline{p} + \overline{q} = (\lambda_1 + \lambda_1')\overline{a}_1 + (\lambda_2 + \lambda_2')\overline{a}_2 + ... + (\lambda_k + \lambda_k')\overline{a_k} \in W$ и $\lambda\overline{p} = \lambda\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda\lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda\lambda_k\overline{a_k} \in W$. Из теоремы 10.1 следует, что $\in W$ подпространство. ■

Если предположить, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a_k}$ - линейно независимы, то они образуют базис W и, следовательно, $\dim W = k$.

Сумма и пересечение подпространств.

Пусть W_1, W_2 - подпространства векторного пространства V. Тогда подмножества $W_0 = W_1 \cap W_2$ и $W = \{\overline{a} + \overline{b} | \overline{a} \in W_1, \overline{b} \in W_2\}$ являются подпространствами векторного пространства V. Подпространство W_0 называется пересечением, а W - суммой подпространств W_1 и W_2 (обозначение: $W = W_1 + W_2$).

■ Докажем, что W подпространство. Пусть $\overline{p}, \overline{q} \in W$, тогда найдутся $\overline{a}, \overline{a}_1 \in W_1$, $\overline{b}, \overline{b}_1 \in W_2$ такие, что $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a}_1 + \overline{b}_1$. Отсюда получаем: $\overline{p} + \overline{q} = (\overline{a} + \overline{a}_1) + (\overline{b} + \overline{b}_1)$. Так как $\overline{a} + \overline{a}_1 \in W_1$, $\overline{b} + \overline{b}_1 \in W_2$, то $\overline{p} + \overline{q} \in W$. Аналогично, $\lambda\overline{p} = \lambda\overline{p} + \lambda\overline{q} \in W$. Из теоремы 10.1 следует, что W подпространство векторного пространства V. Аналогично доказывается, что W_0 - подпространство. ■

Теорема 9.2 *Пусть W_1, W_2 - подпространства векторного пространства V. Тогда*

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

Евклидовы векторные пространства.

Векторное пространство V называется евклидовым, если любым двум векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$ поставлено в соответствие число (которое обозначим $\overline{a} \cdot \overline{b}$) так, что выполняются свойства:

1). $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$.
2). $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$, $\lambda\in R$.
3). $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.
4). $\overline{a}\cdot\overline{a}>0$, если $\overline{a}\neq\overline{0}$.
Число $\overline{a}\cdot\overline{b}$ называется скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
Свойство (4) позволяет определить длину $|\overline{a}|$ вектора $\overline{a}$ равенством: $|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}}$.
Например, векторное пространство из примера 2) можно сделать евклидовым векторным пространством, если ввести скалярное произведение следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}=aa_1+bb_1+cc_1+dd_1.$$

Свойства 1) - 4) очевидно выполняются.
Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются перпендикулярными, если $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$. Обозначение: $\overline{a}\perp\overline{b}$. Вектор $\overline{a}$ перпендикулярен подпространству W^k ($\overline{a}\perp W^k$), если вектор $\overline{a}$ перпендикулярен любому вектору $\overline{b}\in W^k$.
Пусть $\{\overline{m_1},...,\overline{m_k}\}$ - базис подпространства W^k. Легко видеть, что $\overline{a}\perp W^k$ тогда и только тогда, когда $\overline{a}\perp\overline{m_i}$, $i=1,...,k$.
■ Действительно, если $\overline{a}\perp W^k$, то вектор $\overline{a}$ перпендикулярен любому вектору из W^k, в частности, и $\overline{m_i}$, для всех $i=1,...,k$. Обратно: пусть $\overline{a}\perp\overline{m_i}$, для всех $i=1,...,k$ и $\overline{b}\in W^k$ - произвольный вектор. Разложим его по базису подпространства $W^k:\overline{b}=\lambda_1\overline{m_1}+...+\lambda_k\overline{m_k}$. Тогда $\overline{a}\cdot\overline{b}=\lambda_1\overline{a}\cdot\overline{m_1}+...+\lambda_k\overline{a}\cdot\overline{m_k}=0$. Значит, $\overline{a}\perp\overline{b}$.■

9.2 Аффинное n-мерное пространство

Пусть V - векторное пространство. Множество $E\neq\emptyset$ называется **аффинным пространством** (над векторным пространством V), если любым двум точкам $A,B\in E$ поставлен в соответствие вектор из V (который будем обозначать $\overline{AB}$) так, что выполняются следующие свойства:
1). Для любой точки $A\in E$ и любого вектора $\overline{a}\in V$ существует единственная точка $B\in E$ такая, что $\overline{AB}=\overline{a}$.
2). $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ для любых точек $A,B,C\in E$.
Свойства 1) и 2) называются аксиомами аффинного пространства. Векторное пространство V называется пространством переносов аффинного пространства E. Размерностью аффинного пространства E называют размерность его пространства переносов V. Обозначение $\dim E$, или E^n, если $\dim V=n$.
Аффинное пространство называется евклидовым пространством, если его пространство переносов является евклидовым векторным пространством.
Следствия.
1). $\overline{AA}=\overline{0}$. ■ В аксиоме 2 положим $A=B=C$, тогда $\overline{AA}+\overline{AA}=\overline{AA}$. Значит $\overline{AA}=\overline{0}$. ■
2). Если $\overline{AB}=\overline{0}$, то $A=B$. ■ Из следствия 1: $\overline{AA}=\overline{0}$ и дано, что $\overline{AB}=\overline{0}$. Из аксиомы 1: $A=B$. ■
3). $\overline{AB}=-\overline{BA}$. ■ В аксиоме 2 положим $C=A:\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}$. Отсюда: $\overline{AB}=-\overline{BA}$. ■
4). Если $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $\overline{AC}=\overline{BD}$. ■ Из аксиомы 2: $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{CD}+\overline{BC}$, $\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}$. Отсюда получаем: $\overline{AC}=\overline{BD}$. ■

Аффинная система координат. Пусть E - n-мерное аффинное пространство, V - его пространство переносов.

Совокупность точки $O \in E$ и базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ векторного пространства V называют аффинной системой координат аффинного пространства E. Обозначение: $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n.)$

Аффинная система координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ называется декартовой или ортонормированной системой координат, если базисные векторы попарно ортогональны $\overline{e}_i \perp \overline{e}_j$, $i, j = 1, ..., n, i \neq j$, и имеют единичную длину: $|\overline{e}_i| = 1$ для всех i.

Пусть $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ - аффинная система координат аффинного пространства E. Координатами точки $M \in E$ в системе координат R называются координаты вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$.

Обозначение: $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Задача. Пусть даны точки $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, $B(y_1, y_2, ..., y_n)$ в системе координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$. Тогда

$$\overline{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n)$$

в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$.

■ По аксиоме 2: $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n)$. ■

Определение k-плоскости. Пусть E^n - аффинное пространство, V^n - пространство переносов, W^k- k-мерное подпространство пространства переносов V^n, $0 \leqslant k \leqslant n$, точка $A \in E$.

Множество точек
$$\{M | \overline{AM} \in W^k\} \subset E$$
называется k-плоскостью, проходящей через точку A параллельно подпространству W^k.

Обозначение k-плоскости: π_k или (A, W^k). Точка A называется начальной точкой k-плоскости.

Любая 1-плоскость называется прямой, 2-плоскость называется плоскостью, 3-плоскость - пространством, $(n-1)$-плоскость - гиперплоскостью.

Лемма 9.1 *Определение k-плоскости не зависит от выбора начальной точки: если $B \in (A, W^k)$, то $(A, W^k) = (B, W^k)$.*

■ 1. Пусть $M \in (A, W^k)$, то есть $\overline{AM} \in W^k$. Кроме того, $\overline{AB} \in W^k$, поэтому $\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} \in W^k$. Значит, $M \in (B, W^k)$.

2. Пусть $M \in (B, W^k)$, то есть $\overline{BM} \in W^k$. Поэтому $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} \in W^k$. Значит, $M \in (A, W^k)$.

Таким образом, $(A, W^k) \subset (B, W^k)$ и $(B, W^k) \subset (A, W^k)$. Значит, $(A, W^k) = (B, W^k)$. ■

Лемма 9.2 *Любая k-плоскость $(k > 0)$ есть аффинное k-мерное пространство.*

■ Пусть E^n аффинное пространство с пространством переносов V^n, $\pi_k = (C, W^k)$ - k-плоскость. Покажем, что π_k есть аффинное пространство с пространством переносов W^k. Возьмем две точки $A, B \in \pi_k$, тогда $\overline{CA} \in W^k$, $\overline{CB} \in W^k$, значит $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \in W^k$. Тем самым, любым двум точкам $A, B \in \pi_k$ ставится в соответствие вектор $\overline{AB} \in W^k$. Проверим для этого отображения выполнимость 1-ой аксиомы аффинного пространства. Пусть A - произвольная точка π_k, $\overline{a} \in W^k$ - произвольный вектор. По первой аксиоме аффинного пространства, найдется точка $B \in E^n$ такая, то $\overline{AB} = \overline{a}$. По лемме 10.1 можно считать, что $\pi_k = (A, W^k)$. Так как $\overline{a} \in W^k$, то $\overline{AB} \in W^k$ и точка $B \in \pi_k$ по определению k-плоскости. Вторая аксиома $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ выполняется для точек k-плоскости, так как она верна в E^n. ■

9.3 Различные способы задания k-плоскости

Пусть E^n - аффинное пространство с пространством переносов V^n, $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ - аффинная система координат.

Определение уравнения множества в E^n почти дословно повторяет определение уравнения множества из §3.3.

Параметрические уравнения k-плоскости.

Пусть $\pi_k = (A, W^k)$ - k-плоскость в E^n, $A(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Пусть $\{\overline{m}_1, \overline{m}_2, ..., \overline{m}_k\}$ - базис подпространства W^k, причем известны разложения:

$$\overline{m}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\overline{e}_j, \quad i = 1, 2, ..., k$$

Так как векторы $\overline{m}_1, \overline{m}_2, ..., \overline{m}_k$ линейно независимые, то $\operatorname{rank}(c_{ij}) = k$. Напишем уравнение плоскости π_k.

■ Точка $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \pi_k \iff \overline{AM} \in W^k \iff$ существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ такие, что $\overline{AM} = \lambda_1\overline{m}_1 + \lambda_2\overline{m}_2 +, ..., \lambda_k\overline{m}_k$ (1). Последнее равенство равносильно следующим равенствам в координатах:

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1^0 + \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{21} +, ..., \lambda_k c_{k1}, \\ x_2 = x_2^0 + \lambda_1 c_{12} + \lambda_2 c_{22} +, ..., \lambda_k c_{k2}, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = x_n^0 + \lambda_1 c_{1n} + \lambda_2 c_{2n} +, ..., \lambda_k c_{kn}. \ ■ \end{array} \qquad (2)$$

Уравнения (2) называются параметрическими уравнениями k-плоскости, числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ - параметры точки $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in \pi_k$, В силу равенства (1) параметры точки можно рассматривать, как координаты точки $M \in \pi_k$ в системе координат $(A_0, \overline{m}_1, \overline{m}_2, ..., \overline{m}_k)$ аффинного пространства π_k.

Напишем параметрические уравнения прямой или 1-плоскости: $x_1 = x_1^0 + \lambda c_1, x_2 = x_2^0 + \lambda c_2, ..., x_n = x_n^0 + \lambda c_n$. Здесь $\overline{m}(c_1, c_2, ..., c_n)$ - базис одномерного подпространства, параллельного прямой, λ - параметр точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. При $n = 2, 3$ получим известные нам параметрические уравнения прямой на плоскости и в пространстве.

Исключая из параметрических уравнений прямой параметр, получим канонические уравнения прямой:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{c_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{c_2} = ... = \frac{x_n - x_n^0}{c_n}.$$

Заметим, что прямая в пространстве E^n задается $n - 1$ уравнением.

Пример. Пусть в 4-х мерном пространстве E^4 дана 3-плоскость $\pi_3 = (A, W^3)$, $A(1, -1, 0, 2)$, подпространство W^3 пространства переносов задано своим базисом: $\overline{m}_1(1, -1, 2, 0)$, $\overline{m}_2(0, 1, 0, 1)$, $\overline{m}_3(0, 0, 1, 1)$.

Напишем параметрические уравнения π_3, для этого положим в (2) $k = 3$, $n = 4$:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 + \lambda_1, \\ x_2 = -1 - \lambda_1 + \lambda_2, \\ x_3 = 2\lambda_1 + \lambda_3, \\ x_4 = 2 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{array} .$$

Преобразуем эти уравнения - исключим параметры из этих уравнений, для этого решим первые три уравнения относительно λ_1, λ_2, λ_3 и подставим найденные параметры в последнее уравнение. В итоге получим следующее уравнение данной 3-плоскости:

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 4 = 0.$$

Уравнение k-плоскости, заданной $(k+1)$ точкой.

Пусть E^n -аффинное пространство. Точки A_0, $A_1, ..., A_k \in E^n$ находятся в общем положении (или, говорят: "точки общего положения"), если k векторов $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_0A_2}, ...,$ $\overline{A_0A_k}$ линейно независимы.

Лемма 9.3 *Пусть A_0, $A_1, ..., A_k \in E^n$ - точки общего положения. Существует единственная k-плоскость, содержащая эти точки.*

■ Пусть W^k - подпространство с базисом $\{\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}, ..., \overline{A_0A_k}\}$. Тогда k-плоскость $\pi_k = (A_0, W^k)$ содержит эти точки. Покажем, что такая плоскость единственна. Для этого предположим противное: пусть существует еще одна k-плоскость (B, W_1^k), содержащая эти точки. По лемме §10.1 можно записать: $(B, W_1^k) = (A_0, W_1^k)$. Тогда подпространство W_1^k будет содержать векторы $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_0A_2}, ...,$ $\overline{A_0A_k}$. Таким образом, два k-мерных подпространства W^k и W_1^k имеют один и тот же базис, поэтому совпадают. Но, тогда и $(B, W_1^k) = (A_0, W^k)$. Лемма доказана. ■

Пусть даны $k+1$ точка общего положения $A_i(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, где $i = 1, 2, ..., k+1$. Напишем уравнение k-плоскости π_k, содержащей эти точки.

■ Перезададим плоскость π_k: считаем, что плоскость π_k проходит через точку $A_1(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ параллельно подпространству W^k с базисом $\overline{A_1A_j}(a_{j1} - a_{11}, a_{j2} - a_{12}, ..., a_{jn} - a_{1n})$, $j = 2, 3, ..., k+1$. Применяя уравнения (2), получим:

$$\begin{array}{c} x_1 = a_{11} + \lambda_1(a_{21} - a_{11}) + ... + \lambda_k(a_{k+11} - a_{11}), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = a_{1n} + \lambda_1(a_{2n} - a_{1n}) + ... + \lambda_k(a_{k+1n} - a_{1n}). \blacksquare \end{array}$$

Общее уравнение k-плоскости.

Теорема 9.3 *В n-мерном аффинном пространстве любую k- плоскость можно задать совместной системой $n-k$ линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n + a_1 = 0, \\ a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,n}x_n + a_2 = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n-k,1}x_1 + ... + a_{n-k,n}x_n + a_{n-k} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

такой, что $\operatorname{rank}(a_{ij}) = n - k(4)$.

Верно и обратное утверждение: совместная система уравнений (3), при выполнении условия (4), в n-мерном аффинном пространстве задает k-плоскость.

■ Пусть k-плоскость, заданная точкой и подпространством. Тогда можно записать ее параметрические уравнения:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{21} +, ..., \lambda_k c_{k1}, \\ x_2 &= x_2^0 + \lambda_1 c_{12} + \lambda_2 c_{22} +, ..., \lambda_k c_{k2}, \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n &= x_n^0 + \lambda_1 c_{1n} + \lambda_2 c_{2n} +, ..., \lambda_k c_{kn}. \end{aligned} \tag{5}$$

При этом $\operatorname{rank}(c_{ij}) = k$, так как $(c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{in})$ - координаты базисных векторов, $i = 1, ..., k$. Для определенности будем считать, что это равенство достигается неравенством нулю следующего минора:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{k1} \\ c_{12} & \cdots & c_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1k} & \cdots & c_{kk} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Посмотрим на первые k уравнений (5), как на систему относительно $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. В силу (6) эта система, составленная из первых k уравнений (5), имеет единственное решение. Разрешим такую систему относительно λ_i, $i = 1, ..., k$. Тогда система (5) может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{cases} \lambda_1 = b_{11} x_1 + ... + b_{1k} x_k + b_1, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \lambda_k = b_{k1} x_1 + ... + b_{kk} x_k + b_k, \\ x_{k+1} = x_{k+1}^0 + \lambda_1 c_{1k+1} + \lambda_2 c_{2k+1} +, ..., \lambda_k c_{kk+1}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = x_n^0 + \lambda_1 c_{1n} + \lambda_2 c_{2n} +, ..., \lambda_k c_{kn}. \end{cases}$$

Исключим из этой системы уравнений параметры λ_i. Для этого найденные параметры λ_i, из первых k уравнений, подставим в остальные $n - k$ уравнений системы:

$$\begin{cases} x_{k+1} = d_{k+11} x_1 + ... + d_{k+1k} x_k + d_1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = d_{n1} x_1 + ... + d_{nk} x_k + d_n. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) и уравнения (5) равносильны: набор $(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_k)$ является решением (5) тогда и только тогда, когда $(x_1, ..., x_n)$ является решением системы (7). Поэтому система (7) совместна. При этом

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} d_{k+11} & ... & d_{k+1k} & -1 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ d_{n1} & ... & d_{nk} & 0 & 0 & ... & -1 \end{pmatrix} = n - k.$$

Таким образом, k-плоскость можно задать совместной системой $n - k$ уравнений (7), которая имеет вид (3), при этом выполняется условие (4).

В обратную сторону теорема доказывается аналогично: условие (4) позволяет представить систему (3) в виде (7), а система (7) равносильна системе (5). Так как уравнения (5) есть параметрические уравнения k-плоскости, то система (3) задает k-плоскость. ■

Уравнения (3) называются общими уравнениями k-плоскости.

Пример. В аффинном пространстве E^4 система

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

задает 1-плоскость, так как ранг матрицы системы равен 3. Эту систему можно разрешить относительно x_1, x_2, x_3. Обозначим $x_4 = \lambda$. Тогда

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(-1+\lambda), \\ x_2 = \frac{1}{2}(-1+\lambda), \\ x_3 = -1-\lambda, \\ x_4 = \lambda. \end{array}$$

Получили параметрические уравнения данной прямой, из которых можно найти базис 1-мерного подпространства, задающего прямую.

k-плоскость, заданная точкой и нормальным подпространством.

Пусть E^n - евклидово пространство, $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$- декартова система координат.

Пусть дана точка $A(x_1^0, ..., x_n^0) \in E^n$ и $(n-k)$-мерное подпространство W^{n-k}, принадлежащее пространству переносов V^n и заданное своим базисом: $\overline{m}_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$, $i = 1, ..., n-k$.

Рассмотрим множество

$$\pi = \{M | M \in E^n, \overline{AM} \perp W^{n-k}\}.$$

Покажем, что π является k-плоскостью.

■ Точка $M(x_1, ..., x_n) \in \pi \iff \overline{AM} \perp W^{n-k} \iff \overline{AM} \perp \overline{m}_i \iff \overline{AM} \cdot \overline{m}_i = 0$ для $i = 1, ..., n-k$. Так как $\overline{AM} = (x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)$, то последние $n-k$ равенств можно переписать так:

$$\begin{cases} (x_1 - x_1^0)a_{1,1} + ... + (x_n - x_n^0)a_{1,n} = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (x_1 - x_1^0)a_{n-k,1} + ... + (x_n - x_n^0)a_{n-k,n} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Так как $rank(a_{ij}) = n-k$, то по теореме 10.2 система (7) задает k-плоскость. Следовательно, π - k-плоскость. ■

Подпространство $W^{n-k} \subset V^n$ называется нормальным подпространством данной k - плоскости π. Система (7) есть общее уравнение k - плоскости π.

9.4 Взаимное расположение k-плоскостей

Пусть $\pi_k = (A, W^k)$ и $\pi_l = (B, W^l)$ две плоскости аффинного пространства E^n.

Лемма 9.4 *Если плоскости π_k и π_l имеют общую точку, то $\pi_k \cap \pi_l = (C, W^s)$, где $W^s = W^k \cap W^l$, $C \in \pi_k \cap \pi_l$.*

■ Если $C \in \pi_k \cap \pi_l$, то по лемме 10.1 можно записать: $\pi_k = (C, W^k)$ и $\pi_l = (C, W^l)$. Точка $M \in \pi_k \cap \pi_l \iff M \in \pi_k$ и $M \in \pi_l \iff \overline{CM} \in W^k$ и $\overline{CM} \in W^l \iff \overline{CM} \in W^k \cap W^l = W^s \iff M \in (C, W^s)$.■

Пусть плоскости $\pi_k = (A, W^k)$ и $\pi_l = (B, W^l)$ не пересекаются, $W^s = W^k \cap W^l$.

Плоскости π_k и π_l называются параллельными, если $s = \min\{k, l\}$, частично параллельными, если $0 < s < \min\{k, l\}$, и скрещивающимися, если $s = 0$.

Критерии пересечения k-плоскостей в E^n.

Пусть плоскость π_k задана системой $\sum_1$ состоящей из $n - k$ уравнений относительно переменных $x_1, .., x_n$; плоскость π_l задана системой $\sum_2$ состоящей из $n - l$ уравнений относительно переменных $x_1, .., x_n$.

Составим систему $\sum$ из всех уравнений систем $\sum_1$ и $\sum_2$. Пусть r - ранг матрицы системы $\sum$, r' - ранг расширенной матрицы системы $\sum$.

Если $r = r'$, то система $\sum$ совместна и имеет решения. Значит, система $\sum$ будет задавать $(n-r)$-плоскость (теорема 10.3). Следовательно, пересечение плоскостей π_k, π_l есть $(n - r)$-плоскость, заданная системой $\sum$.

Если $r \neq r'$, то система $\sum$ не имеет решений, плоскости π_k и π_l не пересекаются.

Рассмотрим критерий пересечения плоскостей, заданных точкой и подпространством.

Лемма 9.5 *Пересечение плоскостей $\pi_k = (A, W^k)$ и $\pi_l = (B, W^l)$ пусто тогда и только тогда, когда $\overline{AB} \notin W^k + W^l$.*

■ Пусть $\pi_k \cap \pi_l = \emptyset$, но $\overline{AB} \in W^k + W^l$. Тогда $\overline{AB} = \overline{a} + \overline{b}$ при некоторых $\overline{a} \in W^k$, $\overline{b} \in W^l$. Пусть $C \in E^n$ такая, что $\overline{AC} = \overline{a}$. Тогда $C \in \pi_k$ по определению плоскости. Тогда $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{b}$, откуда $\overline{b} = \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$, то есть $\overline{BC} = -\overline{b} \in W^l$. Поэтому $C \in \pi_l$. Таким образом, $C \in \pi_l$ и $C \in \pi_k$, отсюда следует, что $C \in \pi_l \cap \pi_k$. Противоречие - значит, $\overline{AB} \notin W^k + W^l$.

Пусть теперь $\overline{AB} \notin W^k + W^l$, но пересечение $\pi_k \cap \pi_l \neq \emptyset$ и содержит, например, точку C. Тогда $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AC} + (-\overline{BC}) \in W^k + W^l$. Получили противоречие - значит, $\pi_k \cap \pi_l = \emptyset$.■

Следствие. Если $W^k + W^l = V^n$, то $\pi_k \cap \pi_l \neq \emptyset$.

Часть III
Проективная геометрия. Геометрические построения на плоскости. Методы изображений

10 Проективная геометрия

Проективная геометрия есть математическая интерпретация проектирования на плоскость и свойств такого проектирования. Истоки проективной геометрии лежат в живописи и инженерном деле и относятся к эпохе Возрождения. Художники и инженеры искали законы изображения пространственных фигур на плоскости. Понятие проективного пространства сформировалось в работах французского инженера и математика Ж.Дезарга (1591-1661). Проективная геометрия как самостоятельная дисциплина возникла в работах французского инженера Ж.Понселе (1788-1867).

10.1 Определение проективного пространства. Примеры

Пусть V векторное пространство над полем действительных чисел R, $\overline{0}$ - нольвектор в V.

Множество $E \neq \emptyset$ называется **проективным пространством**, если найдется векторное пространство V и отображение

$$\pi : V \setminus \{\overline{0}\} \to E$$

такое, что

1) π-сюръективно.

2) $\pi(\overline{x}) = \pi(\overline{y}) \iff \overline{x}||\overline{y}$ (то есть $\overline{x} = \alpha\overline{y}$ при некотором $\alpha \neq 0$).

Обозначение проективного пространства: (E, V, π) или просто E, если понятно какое векторное пространство определяет данное проективное пространство. При этом будем говорить, что векторное пространство V порождает проективное пространство E. Свойства 1), 2) - называют аксиомами проективного пространства.

Если $\dim V = n + 1$, то E называется n-мерным проективным пространством: $\dim E = n$.

Пусть $A \in E$. По аксиоме 1) существует вектор $\overline{x} \in V$ такой, что $\pi(\overline{x}) = A$. Будем говорить, что вектор $\overline{x}$ **порождает** точку $A \in E$. По аксиоме 2) любой вектор $\overline{y}$, параллельный вектору $\overline{x}$, также порождает точку $\overline{A}$. Следовательно векторы, порождающие одну и ту же точку, принадлежат одномерному векторному подпространству V.

Пусть (E, V^{n+1}, π) - n-мерное проективное пространство. Пусть $V^{k+1} \subset V^{n+1}$ - $(k+1)$-мерное подпространство. Множество $E^k = \pi(V^{k+1} \setminus \{\overline{0}\}) \subset E$ называется **k-плоскостью** (или k-мерной плоскостью) проективного пространства E. Будем говорить, что k-плоскость E^k порождена подпространством V^{k+1}.

При этом 0-плоскость есть точка, так как $\pi(V^1 \setminus \{\overline{0}\})$ - точка по аксиоме 2), 1-плоскость называется **прямой**, 2-плоскость - **плоскостью**, 3-плоскость - **пространством**, $(n-1)$-плоскость - **гиперплоскостью.**

Легко видеть, что любая k-плоскость является k-мерным проективным пространством. ■ Действительно, пусть $E^k = \pi(V^{k+1} \setminus \{\overline{0}\})$ - k-плоскость. Обозначим через π_1 сужение отображения π на подмножество $V^{k+1} \setminus \{\overline{0}\} : \pi_1 = \pi|_{V^{k+1}\setminus\{\overline{0}\}}$. Отображение $\pi_1 : V^{k+1} \setminus \{\overline{0}\} \to E^k$ сюрьективно по определению k-плоскость и для π_1 выполняется аксиома 2). ■

Поэтому k-плоскость также называют k-мерным **проективным подпространством** проективного пространства E^n.

Пример 1. Пусть E - множество всех прямых аффинного пространства, проходящих через точку O (связка прямых). Покажем, что E - проективная плоскость.

■ Пусть V трехмерное векторное пространство элементами которого являются направленные отрезки, то есть векторы аффинного пространства (более точно: V - есть пространство переносов данного аффинного пространства, см. §10.2). Определим отображение $\pi : V \setminus \{\overline{0}\} \to E$ правилом: $\pi(\overline{x}) = l$, где l - прямая из E, параллельная вектору $\overline{x}$. Отображение π удовлетворяет аксиома 1) и 2). ■

Так как $\dim V = 3$, то проективное пространство E в примере 1 есть проективная плоскость. Пусть V^2 - двумерное подпространство пространства V. Тогда $E^1 = \pi(V^2 \setminus \{\overline{0}\})$ - прямая на плоскости E. E^1 состоит из аффинных прямых, параллельных одной аффинной плоскости, векторы которой принадлежат V^2.

Аналогично можно доказать, что и пучок прямых аффинной плоскости есть проективная прямая.

Теорема 10.1 *Пусть (E^n, V^{n+1}, π) - проективное пространство, $\varphi : E^n \to E$ - биекция. Тогда E - n-мерное проективное пространство. Если π_k - k-плоскость в E^n, то $\varphi(\pi_k)$ есть k-плоскость в E.*

■ Рассмотрим композицию отображений $\pi_0 = \varphi \circ \pi : V^{n+1} \setminus \{\overline{0}\} \to E$. Отображение π_0 сюръективно, как композиция сюръективных отображений. Пусть $\overline{x}, \overline{y} \in V^{n+1}$ - параллельны. Тогда $\pi_0(\overline{x}) = (\varphi \circ \pi)(\overline{x}) = \varphi(\pi(\overline{x})) = \varphi(\pi(\overline{y})) = (\varphi \circ \pi)(\overline{y}) = \pi_0(\overline{y})$.

С другой стороны, если $\pi_0(\overline{x}) = \pi_0(\overline{y})$, то есть $\varphi(\pi(\overline{x})) = \varphi(\pi(\overline{y}))$, то, в силу биективности $\varphi : \pi(\overline{x}) = \pi(\overline{y})$, а по аксиоме 2): $\overline{x}||\overline{y}$. Таким образом, E - проективное пространство по определению.

Пусть $\pi_k \subset E^n$ - k-плоскость, то есть $\pi_k = \pi(V^{k+1} \setminus \{\overline{0}\})$ при некотором подпространстве $V^{k+1} \subset V^{n+1}$. Отсюда $\varphi(\pi_k) = \varphi(\pi(V^{k+1} \setminus \{\overline{0}\})) = (\varphi \circ \pi)(V^{k+1} \setminus \{\overline{0}\}) = \pi_0(V^{k+1} \setminus \{\overline{0}\})$ - k-плоскость в E по определению. ■

10.2 Свойства проективной плоскости и проективного пространства

Свойства проективной плоскости. Проективная плоскость (E, V^3, π) обладает следующими свойствами:

1). *Через две различные точки проходит единственная прямая.*

■ Пусть векторы $\overline{A}$, $\overline{B}$ порождают точки A, B. Так как точки различные, то векторы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ не параллельны. Пусть V^2 подпространство V^3 с базисом $\overline{A}$, $\overline{B}$. Тогда прямая $\pi(V^2 \setminus \{\overline{O}\})$ проходит через точки A и B. Если $\pi(W^2 \setminus \{\overline{O}\})$ еще одна прямая, проходящая через точки A и B, то подпространство W^2 содержит векторы $\overline{A}$, $\overline{B}$. Значит V^2 и W^2 имеют один и тот же базис, следовательно $V^2 = W^2$ и $\pi(V^2 \setminus \{\overline{O}\}) = \pi(W^2 \setminus \{\overline{O}\})$. ■

2). *На каждой прямой лежит много точек.*

■ Пусть $l = \pi(V^2 \setminus \{\overline{O}\})$ - произвольная прямая проективной плоскости. Пусть $\overline{A}$, $\overline{B}$ - базис пространства V^2 и вектор $\overline{C} = p\overline{A}+q\overline{B}$, где p, q - произвольные числа такие, что $p \neq 0$, $q \neq 0$. Тогда $\pi(\overline{A})$, $\pi(\overline{B})$ и $\pi(\overline{C})$ различные точки прямой l. Действительно, если допустить, что $\pi(\overline{A}) = \pi(\overline{C})$, то из аксиомы 2) следует, что $\overline{A} = \alpha\overline{C}$. Отсюда $\overline{A} = \alpha(p\overline{A}+q\overline{B})$ или $(p\alpha-1)\overline{A}+q\alpha\overline{B} = \overline{0}$. Векторы $\overline{A}$, $\overline{B}$ линейно независимы, поэтому $p\alpha - 1 = 0$, $q\alpha = 0$. Противоречие показывает, что $\pi(\overline{A}) \neq \pi(\overline{C})$. Аналогично можно показать, что $\pi(\overline{B}) \neq \pi(\overline{C})$. ■

3). *Любые две прямые проективной плоскости пересекаются.*

■ Пусть $l_1 = \pi(V_1^2 \setminus \{\overline{O}\})$ и $l_2 = \pi(V_2^2 \setminus \{\overline{O}\})$ две прямые проективной плоскости E. По теореме 10.3 можно записать, что $\dim(V_1^2 + V_2^2) + \dim(V_1^2 \cap V_2^2) = \dim V_1^2 + \dim V_2^2$ или $\dim(V_1^2 + V_2^2) + \dim(V_1^2 \cap V_2^2) = 4$. Отсюда получаем, что случай $\dim(V_1^2 \cap V_2^2) = 0$ противоречит тому, что $\dim(V_1^2 + V_2^2) \leqslant 3$. Поэтому $\dim(V_1^2 \cap V_2^2) \neq 0$. Тогда ненулевой вектор $\overline{a} \in V_1^2 \cap V_2^2$ порождает точку принадлежит пересечению $l_1 \cap l_2$, то есть $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$. ■

4). *Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

■ Если $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ базис пространства V^3, то точки $\pi(\overline{A})$, $\pi(\overline{B})$ и $\pi(\overline{C})$ не лежат на одной прямой. ■

Свойства проективного пространства. Следующие свойства проективного пространства доказываются аналогично:

1). *Через две различные точки проходит единственная прямая.*

2). *На каждой прямой в E лежит много точек.* 3). *Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.*

4). *Любые две плоскости пересекаются. Любые две различные плоскости пересекаются по прямой.*

5). *Существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

При построении проективной геометрии на плоскости или в пространстве, без привлечения теории векторных пространств, отмеченные свойства принимаются за аксиомы расположения.

10.3 Принцип двойственности на проективной плоскости. Теорема Дезарга

Принцип двойственности на проективной плоскости состоит в следующем:

Если в верном утверждении, в котором говорится только о точках, прямых и их взаимной принадлежности, заменить слова "точка" - словом "прямая," а слово "прямая," - словом "точка," то получим снова верное утверждение.

Предложения проективной геометрии называются двойственными, если одно из них получается из другого при такой замене.

Отношение точки и прямой, описываемое словами "прямая проходит через точку," "точка принадлежит прямой," будем также называть словами "прямая принадлежит точке."

Приведем примеры двойственных утверждений. Возьмем свойства проективной плоскости из §11.2 и рассмотрим им двойственные утверждения, номера которых отметим " $*$ ".

1. Две различные **точки** принадлежат единственной **прямой.**

1.* Две различные **прямые** принадлежат единственной **точке.**

Оба утверждения справедливы.

2. Каждая **прямая** принадлежат по крайней мере трем **точкам.**

2.* Каждая **точка** принадлежат по крайней мере трем **прямым.**

■ Существует три точки не лежащие на одной прямой. Пусть A, B, C такие точки. На прямой (BC) существует три точки (§11.2), пусть D одна из них отличная от B, C. Тогда прямые (AB), (AC), (AD) три различные прямые, принадлежащие одно точке A. ■

Свойство 3 двойственно свойству 1.

4. На плоскости существует три **точки,** не принадлежащие одной **прямой.**

4.* На плоскости существует три **прямые,** не принадлежащие одной **точке.**

■ Если A, B, C неколлинеарные точки, то прямые (AB), (AC), (BC) различные и не проходят через одну точку. ■

Пуст теперь есть утверждение в котором говорится только о точках, прямых и их взаимной принадлежности, причем доказательство этого утверждения основывается на свойства 1-4 проективной плоскости. Заменим в утверждении и его доказательстве слова "точка" - словом "прямая," а слово "прямая," - словом "точка," и получим двойственное утверждение и его доказательство.

10.4 Теорема Дезарга

Трехвершинником называется фигура состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех прямых, проходящих через эти точки. При этом, точки называются вершинами трехвершинника, прямые - сторонами.

Если прямые (AA'), (BB'), (CC') пересекаются в точке S, то точка S, называется **центром перспективы** трехвершинников ABC и $A'B'C'$.

Если точки $(AB) \cap (A'B')$, $(AC) \cap (A'C')$, $(BC) \cap (B'C')$ лежат на одно прямой s, то прямая s называется **осью перспективы** трехвершинников ABC и $A'B'C'$.

Если трехвершинники не имеют центра или оси перспективы при данном обозначении вершин, то можно попробовать сменить обозначение вершин трехвершинников. Если и тогда их нет, то трехвершинники не имеют ни центра, ни оси перспективы.

Теорема 10.2 (Ж.Дезарг) *Два трехвершинника имеют центр перспективы тогда и только тогда, когда они имеют ось перспективы.*

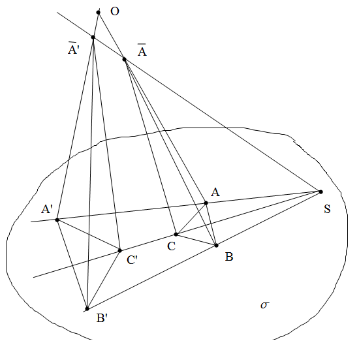
■ Рассмотрим два случая. I. Трехвершинники ABC и $A'B'C'$ лежат в различных плоскостях σ и σ' проективного пространства E^3. Пусть эти плоскости пересекаются по прямой s.

1). Трехвершинники ABC и $A'B'C'$ имеют центр перспективы S, то есть $S = (AA') \cap (BB') \cap (CC')$. Так как $(AA') \cap (BB') = S$, то прямые (AA'), (BB') лежат в одной плоскости. Поэтому прямые этих плоскостей (AB) и $(A'B')$, лежащие в плоскостях σ и σ', пересекаются и точка пересечения принадлежит s. Аналогично устанавливается, что прямые пар (AC), $(A'C')$ и (BC), $(B'C')$ также пересекаются на прямой s. Следовательно, прямая s есть ось перспективы данных трехвершинников.

2). Трехвершинники ABC и $A'B'C'$ имеют ось перспективы s. Так как прямые (AB) и $(A'B')$ пересекаются на оси s, то существует плоскость α, содержащая эти прямые. Пусть плоскость β содержит прямые (BC) и $(B'C')$, а плоскость γ прямые

(AC) и $(A'C')$. Так как $\sigma \neq \sigma'$, то плоскости α, β, γ попарно различны. При этом, $\alpha \cap \beta = (BB')$, $\alpha \cap \gamma = (AA')$, $\beta \cap \gamma = (CC')$. Отсюда получаем: $(AA') \cap (BB') \cap (CC') = (\alpha \cap \beta) \cap (\alpha \cap \gamma) \cap (\beta \cap \gamma) = \alpha \cap \beta \cap \gamma \neq \emptyset$ так как в проективном пространстве три плоскости всегда имеют общую точку. Следовательно, данные трехвершинники имеют центр перспективы.

II. Трехвершинники ABC и $A'B'C'$ лежат в одной плоскости σ и имеют центр перспективы S. Возьмем точку $O \notin \sigma$. На прямой OA найдется точка отличная от A $\overline{A}$ и O. Пусть $\overline{A}'$ есть точка пересечения прямых (OA') и $S\overline{A}$. Рассмотрим два трехвершинника $\overline{A}BC$ и $\overline{A}'B'C'$. Эти трехвершинники не лежат в одной плоскости, в противном случае плоскость трехвершинников совпала бы с плоскостью σ и точка $O \in \sigma$. По части I доказательства теоремы эти трехвершинники имеют ось перспективы s'. Спроектируем прямую s' на плоскость σ из точки O, получим прямую s (то есть через прямую s' и точку O проведем плоскость, она пересечет σ по прямой, которую обозначим через s). Так как прямые $\overline{A}'B'$ и $\overline{A}B$ пересекаются на s', то их проекции $A'B'$ и AB пересекаются на s. Так как $\overline{A}'C' \cap \overline{A}C \in s'$, то их проекции $A'C'$, AC пересекаются в точке $A'C' \cap AC \in s$. Точка пересечения сторон третьей пары $B'C' \cap BC \in s$. Таким образом, трехвершинники ABC и $A'B'C'$ имеют ось перспективы.



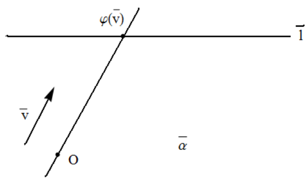
Докажем обратное утверждение: пусть трехвершинники ABC и $A'B'C'$ лежат в плоскости σ и имеют ось перспективы. Воспользуемся принципом двойственности и только что доказанным случаем. Для этого приведем формулировку доказанной части теоремы Дезарга к следующему виду: пусть даны три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой, и три точки A', B', C', не принадлежащие одной прямой. Пусть три прямые, принадлежащие точкам A и A', B и B', C и C', принадлежат одной точке. Тогда точка, принадлежащая прямым, принадлежащим точкам A и B и точкам A' и B', точка, принадлежащая прямым, принадлежащим точкам A и C и точкам A' и C', точка, принадлежащая прямым, принадлежащим точкам C и B и точкам C' и B' принадлежат одной прямой. Изменим формулировку данного верного утверждения по принципу двойственности - заменим в нем слова "точка" - словом "прямая," а слово "прямая," - словом "точка." Получим следующее верное утверждение: пусть даны три прямые A, B, C не принадлежащие одной точке и три прямые A', B', C' не принадлежащие одной точке. Пусть три точки, принадлежащие прямым A и A', B и B', C и C', принадлежат одной прямой. Тогда прямая, принадлежащая точкам, принадлежащим прямым A и B и прямым A' и B', прямая, принадлежащая точкам, принадлежащим прямым A и C и прямым A' и C', прямая, принадлежащая точкам, принадлежащим прямым C и B и прямым C' и B', принадлежат одной точке. Это утверждение справедливо и совпадает с формулировкой обратной теоремы Дезарга. ■

10.5 Расширенное аффинное пространство

Пусть A - аффинное трехмерное пространство. К каждой прямой в A добавим некоторую точку, не принадлежащую A. Назовем эту точку бесконечно удаленной точкой прямой, а аффинную прямую, добавленную бесконечно удаленной точкой, назовем расширенной аффинной прямой или просто - расширенной прямой. Будем считать, что расширенные прямые параллельны, если их аффинные прямые параллельны и параллельные расширенные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке, лежащей на этих прямых. Не параллельные расширенные прямые либо вообще не пересекаются, либо пересекаются в точке, принадлежащей аффинному пространству A. Добавим к A все бесконечно удаленные точки всех прямых из A. Полученное множество обозначим через $\overline{A}$ и назовем расширенным аффинным пространством. Точки A будем называть собственными точками пространства $\overline{A}$, бесконечно удаленные точки - несобственные точки пространства $\overline{A}$. Множество всех бесконечно удаленных точек расширенного пространства $\overline{A}$ назовем несобственной плоскостью (дальше покажем, что это множество действительно является плоскостью в определенном смысле). Добавим к каждой аффинной плоскости α бесконечно удаленные точки всех аффинных прямых, принадлежащих плоскости α. Полученное множество назовем расширенной аффинной плоскостью $\overline{\alpha}$. Множество всех несобственных точек $\overline{\alpha}$ называется несобственной прямой плоскости $\overline{\alpha}$.

1). **Расширенная аффинная прямая является проективной прямой.**

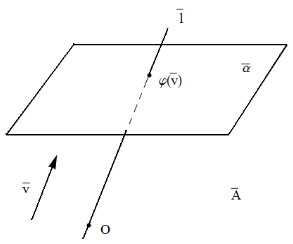
■ Пусть $\overline{l}$ - расширенная прямая, лежащая в расширенной аффинной плоскости $\overline{\alpha}$.



Пусть V^2 - векторное пространство переносов аффинной плоскости α и точка $O \in \alpha$ не принадлежит прямой l. Определим отображение $\varphi : V^2 \setminus \{\overline{0}\} \to \overline{l}$ правилом: пусть $\overline{v} \in V^2$ - произвольный вектор, l_1 - расширенная прямая, проходящая через точку O, параллельно вектору $\overline{v}$. Тогда $\varphi(\overline{v}) = \overline{l} \cap l_1$. Тогда φ - сюръективно и образы параллельных векторов совпадают. Следовательно $\overline{l}$ - проективная прямая. ■

2). **Расширенная аффинная плоскость есть проективная плоскость.**

■ Пусть $\overline{\alpha}$ - расширенная плоскость расширенного аффинного пространства $\overline{A}$. Пусть V^3 - векторное пространство переносов аффинного пространства A и точка $O \in A$ не принадлежит плоскости $\overline{\alpha}$. Определим отображение $\varphi : V^3 \setminus \{\overline{0}\} \to \overline{\alpha}$ правилом: пусть $\overline{v} \in V^3$ - произвольный вектор, $l \subset \overline{A}$ - расширенная прямая, проходящая через точку O, параллельно вектору $\overline{v}$. Тогда $\varphi(\overline{v}) = \overline{\alpha} \cap l$. Отображение φ -сюрьективно.



Действительно, прообразом собственной точки $M \in \overline{\alpha}$ является любой вектор, параллельный прямой (OM). Пусть $M \in \overline{\alpha}$ несобственная точка, а l расширенная прямая плоскости $\overline{\alpha}$, содержащая точку M. Если m прямая, проходящая через точку O, параллельно l, то прообразом точки M будет любой вектор, параллельный m.

Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in V^3$ произвольные параллельные векторы. Так как через точку O, параллельно этим векторам, можно провести только одну прямую, то $\varphi(\overline{a}) = \varphi(\overline{b})$. Обратное утверждение следует из определения отображения φ. Таким образом, $\overline{\alpha}$ - проективная плоскость по определению. ■

Отметим, что несобственные точки плоскости $\overline{\alpha}$ порождаются векторами, параллельными $\overline{\alpha}$. Поэтому множество несобственных точек можно представить в виде $\varphi(V^2 \setminus \{\overline{0}\})$, где V^2 - подпространство, векторы которого параллельны плоскости $\overline{\alpha}$. Следовательно множество несобственных точек расширенной аффинной плоскости есть проективная прямая.

Замечание. Аналогично можно доказать, что расширенное аффинное пространство является проективным пространством - для этого надо ввести расширенное четырехмерное аффинное пространство.

10.6 Проективная система координат

Пусть (E^n, V^{n+1}, π) - проективное пространство.

Пусть F множество, состоящее из $m > n$ точек проективного пространства E^n, а $\overline{A}_1, ..., \overline{A}_m$ - векторы порождающие точки множества F. Если любой набор из $n+1$ векторов, принадлежащих множеству $\{\overline{A}_1, ..., \overline{A}_m\}$, образуют базис V^{n+1}, то будем говорить, что точки множества F находятся в общем положении.

Из определения вытекает, что если точки A_0, $A_1, ...$, A_m, $m > n$, находятся в общем положении, то любой набор из $n+1$ точки этого множества точек не принадлежит одной гиперплоскости. Это следует из того, что гиперплоскость порождается n-мерным векторным подпространством.

Примеры. 1). Точки A_0, A_1, A_2 проективной прямой E^1 находятся в общем положение, если никакие 2 точки из этих трех не лежат в гиперплоскости, то есть в подпространстве E^0. Так как E^0 есть точка, то общее положение данных точек означает, что они различны.

2). На проективной плоскости, например, 4-ре точки находятся в общем положении, если никакие три из них не лежат на одной прямой.

3). В 3-х мерном пространстве 5 точек находятся в общем положении, если никакие четыре из них не лежат в одной плоскости.

Лемма 10.1 *В проективном пространстве* (E^n, V^{n+1}, π) *существуют* $n+2$ *точки общего положения.*

■ Пусть $\overline{e}_1, ..., \overline{e}_{n+1}$ - базис векторного пространства V^{n+1}. Тогда $n+2$ точки, порожденные всеми векторами базиса и вектором $\overline{e} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + ... + \overline{e}_{n+1}$, находятся в общем положении, так как любые $n+1$ векторов из множества $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_{n+1}, \overline{e}\}$ линейно независимы. ■

Проективной системой координат в проективном пространстве E^n называется упорядоченное множество $n+2$ точек общего положения A_0, $A_1, ...$, A_n, E. Обозначение: $R = (A_0, A_1, ..., A_n, E)$. Прямые, проходящие через пары точек системы координат, называются координатными прямыми, точки A_i называются базисными точками, последняя точка E называется единичной точкой системы координат.

Перед определением координат точек необходимо доказать следующие две леммы.

Лемма 10.2 *Пусть* $R = (A_0, A_1, ..., A_n, E)$ *- проективная система координат проективного пространства* (E^n, V^{n+1}, π). *Существует базис* $\overline{e}_0$, $\overline{e}_1, ...$, $\overline{e}_n$ *в* V^{n+1} *такой, что* $\pi(\overline{e}_i) = A_i$, $\pi(\overline{e}_0 + ... + \overline{e}_n) = E$, $i = 0, 1, 2, ..., n$.

■ Рассмотрим векторы $\overline{A}_0$, $\overline{A}_1, ...$, $\overline{A}_n$ $\overline{E}$, порождающие точки системы координат R. Так как $\overline{A}_0$, $\overline{A}_1, ...$, $\overline{A}_n$ - базис векторного пространства V^{n+1}, то можно записать, что $\overline{E} = \alpha_0\overline{A}_0 + \alpha_1\overline{A}_1 + ... + \alpha_n\overline{A}_n$. Здесь каждый коэффициент α_i не равен нулю. Действительно, если бы, например, $\alpha_0 = 0$, то $\overline{E} = \alpha_1\overline{A}_1 + ... + \alpha_n\overline{A}_n$ и векторы $\overline{E}$, $\overline{A}_1, ...$, $\overline{A}_n$ не образовывали бы базис, а точки A_0, $A_1, ..., A_n$, E не были бы в общем положении.

Положим $\overline{e}_i = \alpha_i \overline{A}_i$, для всех $i = 0, 1, ..., n$. Тогда $\{\overline{e}_0, \overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ - базис векторного пространства V^{n+1}, векторы $\overline{e}_i$ порождают точки A_i, а сумма этих базисных векторов порождают E. ■

Пусть $R = (A_0, A_1, ..., A_n, E)$ - проективная система координат проективного пространства (E^n, V^{n+1}, π). Базис $\{\overline{e}_0, \overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ векторного пространства V^{n+1} называется **согласованным** с системой координат R, если векторы $\overline{e}_i$ порождают точки A_i, $i = 0, 1, ..., n$, а их сумма порождает единичную точку E.

Лемма 10.3 *Пусть в проективном пространстве* (E^n, V^{n+1}, π) *базисы* $\{\overline{e}_0, \overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ *и* $\{\overline{e}'_0, \overline{e}'_1, ..., \overline{e}'_n\}$ *согласованы с системой координат* $R = (A_0, A_1, ..., A_n, E)$. *Существует число* ρ, *такое, что* $\overline{e}'_i = \rho \overline{e}_i$, *для всех* $i = 0, 1, ..., n$.

■ Так как $\pi(\overline{e}'_i) = \pi(\overline{e}_i) = A_i$, то по аксиоме 2 проективного пространства найдется число ρ_i такое, что $\overline{e}'_i = \rho_i \overline{e}_i$. Так как $\pi(\overline{e}'_0 + \overline{e}'_1 + ... + \overline{e}'_n) = \pi(\overline{e}_0 + \overline{e}_1 + ... + \overline{e}_n) = E$, то найдется число ρ такое, что $\overline{e}'_0 + \overline{e}'_1 + ... + \overline{e}'_n = \rho(\overline{e}_0 + \overline{e}_1 + ... + \overline{e}_n)$. Отсюда получаем что $\rho_0 \overline{e}_0 + ... + \rho_n \overline{e}_n = \rho(\overline{e}_0 + ... + \overline{e}_n)$ или $(\rho_0 - \rho)\overline{e}_0 + ... + (\rho_n - \rho)\overline{e}_n = \overline{0}$. Из линейной независимости базисных векторов следуют равенства $\rho_0 = \rho_1 = ... = \rho_n = \rho$. Поэтому $\overline{e}'_i = \rho \overline{e}_i$ для всех $i = 0, 1, ..., n$. ■

Пусть R - проективная система координат проективного пространства E^n. Проективными **координатами** точки $M \in E^n$ называются координаты вектора $\overline{M}$, порождающего точку M, в базисе, согласованном с R.

Замечание. Пусть R - проективная система координат в проективном пространстве (E^n, V^{n+1}, π), $B = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_{n+1}\}$ - базис векторного пространства V^{n+1}, согласованный с R, и вектор $\overline{M}(x_0, x_1, ..., x_n)$ порождает точку $M \in E^n$. Тогда $x_0, x_1, ..., x_n$ есть координаты точки M в системе координат R. Если $\overline{N}(y_0, y_1, ..., y_n)$ другой вектор порождающий точку M, то по аксиоме 2 можно записать: $\overline{M} = \lambda \overline{N}$. Поэтому $x_i = \lambda y_i$ для всех i. Таким образом, координаты точки проективного пространства определяются не однозначно, а с точностью до произвольного ненулевого множителя.

Рассмотреть ещё один базис $B' = \{\overline{e}'_1, ..., \overline{e}'_{n+1}\}$ согласованный с R. По лемме 11.3 можно записать: $\overline{e}'_i = \rho \overline{e}_i$. Если вектор $\overline{M}(x'_0, x'_1, ..., x'_n)$ порождает точку $M \in E^n$, то $\overline{M} = x'_0 \overline{e}'_0 + ... + x'_n \overline{e}'_n = x'_0 \rho \overline{e}_0 + ... + x'_n \rho \overline{e}_n$ и, следовательно, координатами точки $M \in E^n$ являются также пропорциональные наборы $(x'_0, x'_1, ..., x'_n)$ и $(x'_0 \rho, x'_1 \rho, ..., x'_n \rho)$.

При обозначении, координаты точки проективного пространства будем разделять двоеточиями: $\mathbf{M(x_0 : x_1 : ... : x_n)}$, подчеркивая этим тот факт, что координаты точки в проективном пространстве определяются с точностью до пропорционального множителя.

Пример. 1). Пусть вектор $\overline{M}$ порождает точку $M(x_0 : x_1 : ... : x_n)$. Тогда вектор $\overline{M}$, порождающий эту точку, имеет координаты $\rho x_0, \rho x_1, ..., \rho x_n$ при некотором $\rho \neq 0$ (в проективном пространстве нет точек с нулевыми координатами).

2). Пусть $R = (A_0, A_1, ..., A_n, E)$ - проективная система координат. Найдем координаты точек A_0, $A_1, ...,$ A_n, E.

■ Пусть $B = \{\overline{e}_0, \overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ - базис согласованный с системой координат R. Вектор $\overline{e}_i$ порождает точку A_i, $i = 0, 1, ..., n$. Так как вектор $\overline{e}_i$ имеет координаты $(0, ..., 1, ..., 0)$ в базисе B, то $A_i(0 : 0 : ... : 1 : ... : 0)$, где 1 стоит на $i + 1$ месте. Единичная точка $E(1 : 1 : ... : 1)$. ■

Условие коллинеарности точек проективной плоскости. Точки $M_1(a_1 : b_1 : c_1)$, $M_2(a_2 : b_2 : c_2)$, $M_3(a_3 : b_3 : c_3)$ проективной плоскости принадлежат одной прямой (то есть коллинеарны) тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

■ Данные точки коллинеарны тогда и только тогда, когда векторы их порождающие $\overline{M}_i(a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, 2, 3$, лежат в двумерном подпространстве, что равносильно (1). ■

Лемма 10.4 *(О проекции) Пусть $R = (A_0, A_1, A_2, E)$ - проективная система координат на проективной плоскости (E^2, V^3, π) и $M(x_0 : x_1 : x_2)$ - произвольная точка. Пусть $M_2 = (A_0A_1) \cap (A_2M)$, $E_2 = (A_0A_1) \cap (A_2E)$. Тогда точка M_2 имеет координаты $(x_0 : x_2)$ в системе координат $R_2 = (A_0, A_1, E_2)$ на проективной прямой (A_0A_1).*

■ Пусть $M_2(y_0 : y_1 : y_2)$ в системе координат R. Так как A_0, A_1, M_2 - коллинеарны, то, вычисляя для этих точек определитель в (1), получим: $y_2 = 0$. Точки $A_2(0 : 0 : 1)$, M, M_2 - коллинеарны, поэтому из равенства (1), составленного для этих точек, получим: $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} = 0$. Отсюда получаем пропорциональность координат: $x_0 = \lambda y_0$, $x_1 = \lambda y_1$. Поэтому $M_2(x_0 : x_1 : 0)$ в системе координат R. Аналогично находим, что $E_2(1 : 1 : 0)$ в системе координат R.

По определению прямой существует двумерное подпространство V^2 такое, что множество $V^2 \setminus \{\overline{0}\}$ порождает прямую (A_0A_1). Прямая есть одномерное проективное пространство. Так как точки A_0, A_1, E_2 различны, то $R_2 = (A_0, A_1, E_2)$ - проективная система координат на (A_0A_1).

Пусть $B = \{\overline{e}_0, \overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ - базис, согласованный с R. Тогда векторы $\overline{e}_0, \overline{e}_1$ порождают соответственно точки A_0, A_1, и, значит, образуют базис V^2. Этот базис согласован с R_2. Действительно, так как $E_2(1 : 1 : 0)$ в системе координат R, то вектор $\overline{E}_2 = \overline{e}_0 + \overline{e}_1 + 0\overline{e}_2$ порождает точку E_2, то есть сумма векторов $\overline{e}_0 + \overline{e}_1$ порождает точку E_2. Следовательно базис $\{\overline{e}_0, \overline{e}_1\}$ согласован с системой координат R_2. Так как $M_2(x_0 : x_1 : 0)$ в R, то вектор $\overline{M}_2 = x_0\overline{e}_0 + x_1\overline{e}_1$ порождает точку M_2. По определению координат $M_2(x_0 : x_1)$ в системе координат R_2 проективной прямой (A_0, A_1). ■

10.7 Преобразование проективных координат

Пусть (E^2, V^3, π) - проективная плоскость. Пусть даны две проективные системы координат $R = (A_0, A_1, A_2, E)$, $R' = (A'_0, A'_1, A'_2, E')$, причем известны координаты точек

$$A'_i(a_{i0} : a_{i1} : a_{i2}), \quad E'(a_0 : a_1 : a_2) \tag{1}$$

в системе координат R, $i = 0, 1, 2$.

Пусть точка M имеет координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ в системе координат R и $(x'_0 : x'_1 : x'_2)$ в системе координат R'. Найдем связь между этими координатами.

■ 1). Пусть базис $B = \{\overline{e}_0, \overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ согласован с системой координат R. Построим базис, согласованный с системой координат R'. Для любых ненулевых чисел ρ_i векторы $\overline{e}'_i(\rho_i a_{i0}, \rho_i a_{i1}, \rho_i a_{i2})$ (заданные в базисе B) порождают точки $A'_i(a_{i0} : a_{i1} : a_{i2})$, $i = 0, 1, 2$. Поэтому векторы $\overline{e}'_0, \overline{e}'_1, \overline{e}'_2$ образую базис B' векторного пространства V^3.

При каких значениях ρ_i этот базис B' будет согласованным с системой координат R'? Потребуем, чтобы вектор $\overline{e}'_0 + \overline{e}'_1 + \overline{e}'_2$ порождал точку $E'(a_0 : a_1 : a_2)$, то есть

$$\begin{cases} a_0 = \rho_0 a_{00} + \rho_1 a_{10} + \rho_2 a_{20}, \\ a_1 = \rho_0 a_{01} + \rho_1 a_{11} + \rho_2 a_{21}, \\ a_2 = \rho_0 a_{02} + \rho_1 a_{12} + \rho_2 a_{22}. \end{cases} \tag{1}$$

Так как точки A'_i, $i = 0, 1, 2$, неколлинеарны, то $\det(a_{ij}) \neq 0$ в (1) и система (1) имеет ненулевое решение ρ_0, ρ_1, ρ_2. Домножим координаты точек A'_i, на эти решение ρ_i, $i = 0, 1, 2$, и, полученные произведения $a_{ij}\rho_i$, снова обозначим через a_{ij}. Тогда векторы $\overline{e}'_i(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2})$ образуют базис, согласованный с R'.

2). Пусть вектор $\overline{M}$ порождает точку M. Можно считать, что вектор $\overline{M}$ имеет координаты $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ в базисе B и координаты (x'_0, x'_1, x'_2) в базисе B', $\lambda \neq 0$. Отсюда, учитывая, что $\overline{e}'_i(a_{i0}, a_{i1}, a_{i2})$ в базисе B, получим, что $\overline{M} = x'_0\overline{e}'_0 + x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2 = x'_0(a_{00}\overline{e}_0 + a_{01}\overline{e}_1 + a_{02}\overline{e}_2) + x'_1(a_{10}\overline{e}_0 + a_{11}\overline{e}_1 + a_{12}\overline{e}_2) + x'_2(a_{20}\overline{e}_0 + a_{21}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2) = (x'_0 a_{00} + x'_1 a_{10} + x'_2 a_{20})\overline{e}_0 + (x'_0 a_{01} + x'_1 a_{11} + x'_2 a_{21})\overline{e}_1 + (x'_0 a_{02} + x'_1 a_{12} + x'_2 a_{22})\overline{e}_2$. С другой стороны: $\overline{M} = \lambda x_0\overline{e}_0 + \lambda x_1\overline{e}_1 + \lambda x_2\overline{e}_2$. Приравнивая координаты, окончательно получаем:

$$\begin{cases} \lambda x_0 = a_{00}x'_0 + a_{10}x'_1 + a_{20}x'_2, \\ \lambda x_1 = a_{01}x'_0 + a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2, \\ \lambda x_2 = a_{02}x'_0 + a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2. \end{cases} \tag{2}$$

При этом $\det(a_{ij}) \neq 0$ и выполняются соотношения (1), которые с учетом соглашения, можно записать так:

$$\begin{cases} a_0 = a_{00} + a_{10} + a_{20}, \\ a_1 = a_{01} + a_{11} + a_{21}, \\ a_2 = a_{02} + a_{12} + a_{22}, \end{cases} \tag{3}$$

где $E'(a_0 : a_1 : a_2)$.

Верно и обратное утверждение: формулы (2) при выполнении условий (3) есть формулы преобразования координат для двух проективных систем координат R и R', где R - произвольная система координат, а система координат R' задана точками (1), где координаты взяты из (2) и (3). Действительно, если написать формулы преобразования координат для таких систем координат, то получим формулы (2). ■

Замечание. Рассмотрим на проективной прямой E^1 две проективные системы координат $R = (A_0, A_1, E)$ и $R' = (A'_0, A'_1, E')$, причем известно, что $A'_i(a_{i0} : a_{i1})$, $E'(a_0 : a_1)$ в системе координат R, $i = 0, 1$.

Формулы преобразования координат на прямой имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda x_0 = a_{00}x'_0 + a_{10}x'_1, \\ \lambda x_1 = a_{01}x'_0 + a_{11}x'_1. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\det(a_{ij}) \neq 0$, $\lambda \neq 0$ и

$$\begin{cases} a_0 = a_{00} + a_{10}, \\ a_1 = a_{01} + a_{11}. \end{cases}$$

■ Вывод формул (4) и (2) аналогичен. ■

Пример. Пусть E^1 - проективная прямая, $R = (A_0, A_1, E)$, $R' = (A'_0, A'_1, E')$ - проективные системы координат, такие, что $A'_0(1:2)$, $A'_1(2:1)$, $E'(3:2)$ в системе координат R. Напишем формулы преобразования координат для данных двух систем координат.

■ Составим формулы аналогичные (1) для прямой:

$$\begin{cases} 3 = \rho_0 1 + \rho_1 2, \\ 2 = \rho_0 2 + \rho_1 1. \end{cases}$$

Отсюда находим: $\rho_0 = \frac{1}{3}$, $\rho_1 = \frac{4}{3}$. Умножим теперь координаты A'_0 на ρ_0, а координаты A'_1 на ρ_1 : $A'_0(\frac{1}{3} : \frac{2}{3})$, $A'_1(\frac{8}{3} : \frac{4}{3})$, $E'(3:2)$. Составим теперь формулы (4):

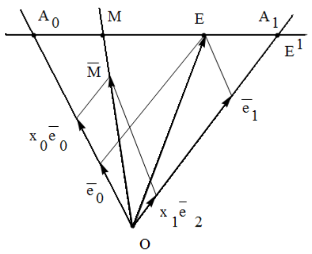
$$\begin{cases} \lambda x_0 = \frac{1}{3}x'_0 + \frac{8}{3}x'_1, \\ \lambda x_1 = \frac{2}{3}x'_0 + \frac{4}{3}x'_1. \end{cases} \quad ■$$

10.8 Система координат в расширенном аффинном пространстве

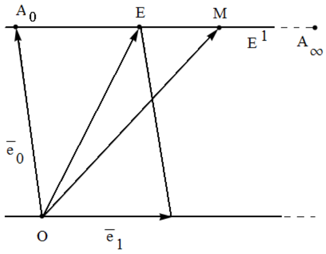
Рассмотрим две задачи на построение точек по их проективным координатам в расширенном аффинном пространстве.

Задача 1. На расширенной аффинной прямой E^1 дана проективная система координат $R = (A_0, A_1, E)$. Построить точку $M(x_0 : x_1)$.

■ Обозначим через π-расширенную аффинную плоскость, содержащую проективную прямую E^1. Пусть V^2 - двумерное векторное пространство, состоящее из векторов параллельных плоскости π и пусть точка O не принадлежит прямой E^1. Определим отображение $\pi : V^2 \backslash \{\overline{0}\} \to E^1$ правилом: вектору $\overline{x} \in V^2 \backslash \{\overline{0}\}$ поставим в соответствие точку $\pi(\overline{x})$ пересечения прямой E^1 и прямой, параллельной $\overline{x}$ и проходящей через точку O. Отображение π удовлетворяет аксиомам 1) и 2) проективного пространства. Представим вектор $\overline{OE}$ как сумму двух векторов $\overline{e}_0 || \overline{OA}_0$ и $\overline{e}_1 || \overline{OA}_1$. Тогда $\{\overline{e}_0, \overline{e}_1\}$ - базис векторного пространства V^2, согласованный с системой координат $R = (A_0, A_1, E)$. Строим вектор $\overline{M} = x_0\overline{e}_0 + x_1\overline{e}_1$. Тогда $\pi(\overline{M})$ - искомая точка. ■



Рассмотрим частный случай проективной системы координат на расширенной прямой E^1. Возьмем систему координат $R = (A_0, A_\infty, E)$, где A_∞ - бесконечно удаленная точка прямой E^1.



Рассмотрим на аффинной прямой $E^1 \backslash \{A_\infty\}$ аффинную систему координат $R = (A_0, \overline{e}_1)$, где $\overline{e}_1 = \overline{A_0E}$. Выразим аффинную координату x собственной точки M прямой E^1 через ее проективные координаты $(x_0 : x_1)$. ■ По определению координат можно записать: $\overline{A_0M} = x\overline{e}_1$ и $\overline{OM} = \rho(x_0\overline{e}_0 + x_1\overline{e}_1)$ при некотором $\rho \neq 0$. Отметим, что у собственной точки проективная координата $x_0 \neq 0$ (векторы $\overline{OM}$ и $\overline{e}_1$ не параллельны). Так как $\overline{OM} = \overline{OA}_0 + \overline{A_0M}$, то $\rho(x_0\overline{e}_0 + x_1\overline{e}_1) = \overline{e}_0 + x\overline{e}_1$. Отсюда получим: $\rho x_0 = 1$, $\rho x_1 = x$ или

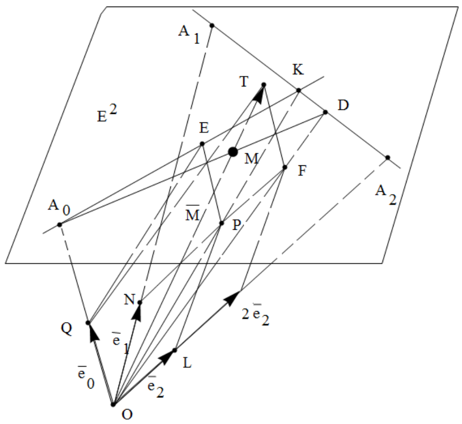
$$x = \frac{x_1}{x_0}. \quad ■ \tag{1}$$

Проективные и аффинные координаты собственной точки расширенного аффинного пространства называются соответственно **однородными** и **неоднородными** координатами.

Зависимость между однородными и неоднородными координатами на расширенной аффинной прямой устанавливается соотношением (1).

Задача 2. Пусть на расширенной аффинной плоскости E^2 задана система координат $R = (A_0, A_1, A_2, E)$. Построить точку $M(x_0 : x_1, x_2)$.

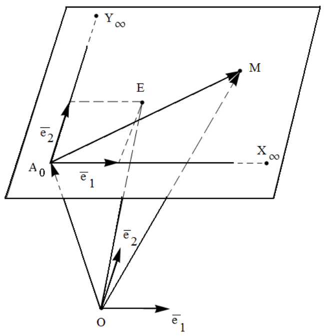
■ I способ. Обозначим через E расширенное трехмерное аффинное пространство, содержащее данную плоскость E^2. Пусть V^3 - трехмерное векторное пространство образованное векторами аффинного пространства E и точка O не принадлежит плоскости E^2. Определим отображение $\pi : V^3 \setminus \{\overline{0}\} \to E^2$ правилом: для вектора $\overline{x} \in V^3$ через $\pi(\overline{x})$ обозначим точку пересечения плоскости E^2 и прямой, параллельной $\overline{x}$ и проходящей через точку O. Отображение π удовлетворяет аксиомам 1) и 2) проективного пространства. Представим вектор $\overline{OE}$ как сумму трех векторов $\overline{e}_0 || \overline{OA}_0$, $\overline{e}_1 || \overline{OA}_1$ и $\overline{e}_2 || \overline{OA}_2$. Для этого, обозначим через $K = (A_0E) \cap (A_1A_2)$. Пусть



P и Q есть точки пересечения прямых, проходящих через точку E параллельно (OA_0) и (OK), с прямыми (OK) и (OA_0) соответственно. Через точку P проведем прямые параллельно (OA_1) и (OA_2), они пересекут прямые (OA_2), (OA_1) в точках L, N. Обозначим через $\overline{e}_0 = \overline{OQ}$, $\overline{e}_1 = \overline{ON}$ и $\overline{e}_2 = \overline{OL}$. Тогда $\{\overline{e}_0, \overline{e}_1 \overline{e}_2\}$ - базис векторного пространства V^3, согласованный с системой координат $R = (A_0, A_1, A_2, E)$. Строим вектор $\overline{M} = x_0\overline{e}_0 + x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2$. Для определенности будем считать, что $M(1 : 1 : 2)$, поэтому строим вектор $\overline{M}(1 : 1 : 2)$. Сначала строим вектор $\overline{OF} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$. Пусть $D = \pi(\overline{OF})$. В плоскости (OA_0D) строим вектор $\overline{M} = \overline{e}_0 + \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 = \overline{e}_0 + \overline{OF}$. Если точка T такая, что $\overline{OT} = \overline{M}$, то $M = \pi(\overline{OT}) = (OT) \cap (A_0D)$ - искомая точка. ■

II способ. На проективной прямой (A_0A_2) в системе координат $R = (A_0, A_2, E_1)$ построим точку M_1 с координатами $(x_0 : x_2)$, точка $E_1 = (A_1E) \cap (A_0A_2)$. На проективной прямой (A_1A_2) в системе координат $R = (A_1, A_2, E_0)$ построим точку M_0 с координатами $(x_1 : x_2)$, точка $E_0 = (A_0E) \cap (A_1A_2)$. Тогда $M = (A_0M_0) \cap (A_1M_1)$.

■ Доказательство следует из леммы 4. ■



Рассмотрим частный случай проективной системы координат на расширенной плоскости E^2. Возьмем проективную систему координат $R = (A_0, X_\infty, Y_\infty, E)$, где X_∞, Y_∞ - бесконечно удаленные точки плоскости E^2 и рассмотрим аффинную систему координат $R = (A_0, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$, где векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ порождают соответственно точки X_∞, Y_∞, а их сумма $\overline{e}_1 + \overline{e}_2 = \overline{A_0E}$. Тогда базис $\{\overline{e}_0, \overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, где $\overline{e}_0 = \overline{OA}_0$, будет согласован с системой координат R.

Выразим аффинные (неоднородные) координаты (x, y) собственной точки M плоскости E^2 через ее проективные (однородные) координаты $(x_0 : x_1 : x_1)$. ■ По определению координат можно записать: $\overline{A_0M} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2$ и $\overline{OM} = \rho(x_0\overline{e}_0 + x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2)$ при некотором $\rho \neq 0$. Отметим, что у собственной точки проективная координата $x_0 \neq 0$. Так как $\overline{OM} = \overline{OA}_0 + \overline{A_0M}$, то $\rho(x_0\overline{e}_0 + x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2) =$

$\bar{e}_0+x\bar{e}_1+y\bar{e}_2$. Приравнивая соответствующие координаты, получим: $\rho x_0 = 1$, $\rho x_1 = x$, $\rho x_2 = y$. Отсюда следуют формулы перехода от однородных координат собственной точки расширенной аффинной плоскости к ее неоднородным координатам:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}. \blacksquare \tag{2}$$

10.9 Уравнение прямой на проективной плоскости

Пусть (E^2, V^3, π) - проективная плоскость. Пусть $R = (A_0, A_1, A_2, E)$ - проективная система координат, $B = \{\bar{e}_0, \bar{e}_1 \bar{e}_2\}$ - базис, согласованный с R.

Напишем уравнение прямой l, проходящей через две различные точки $M_1(x_{10} : x_{11} : x_{12})$, $M_2(x_{20} : x_{21} : x_{22})$.

■ Прямая l существует, единственна и порождена двумерным подпространством $V^2 \subset V^3$ с базисом $\{\overline{M}_1, \overline{M}_2\}$, векторы $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ - порождают точки M_1, M_2. Точка $M(x_0 : x_1 : x_2) \in l$ тогда и только тогда, когда

а) вектор $\overline{M}$, порождающий точку M, и векторы $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ принадлежат двумерному подпространству V^2, что равносильно существованию чисел α, β таких, что $\overline{M} = \alpha\overline{M}_1 + \beta\overline{M}_2$. Запишем последнее равенство в координатах и получим параметрические уравнения прямой l :

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha x_{10} + \beta x_{20}, \\ x_1 &= \alpha x_{11} + \beta x_{21}, \\ x_2 &= \alpha x_{12} + \beta x_{22}. \end{aligned} \tag{1}$$

Числа $\alpha, \beta \in R$ называются параметрами точки M прямой l.

б) точки M, M_1, M_2 коллинеарны, что равносильно равенству:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Так как координаты точек прямой l и только они удовлетворяют (2), то уравнение (2) (относительно x_0, x_1, x_2) есть уравнение прямой l. ■

Раскроем определитель в (2) и получим, что прямую на проективной плоскости можно задать однородным уравнением вида:

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \tag{3}$$

где

$$a_0 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}, \quad a_1 = -\begin{vmatrix} x_{10} & x_{12} \\ x_{20} & x_{22} \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} x_{10} & x_{11} \\ x_{20} & x_{21} \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты в (3) не все равны нулю, так как векторы $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ не параллельны. Числа a_0, a_1, a_2 в (3) называются **координатами прямой** l (в системе координат R); обозначение: $l(a_0 : a_1 : a_2)$. Можно записать, что

$$M(x_0 : x_1 : x_2) \in l(a_0 : a_1 : a_2) \iff a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0.$$

Лемма 10.5 *Подмножество проективной плоскости, заданное уравнением (3), где коэффициенты a_0, a_1, a_2 не равны нулю одновременно, есть прямая, проходящая через точки $M_0(0 : -a_2 : a_1)$, $M_1(-a_2 : 0 : a_0)$, $M_2(-a_1 : a_0 : 0)$.*

■ Две из трех точек в утверждении леммы всегда различны. Так, если $a_0 \neq 0$, то M_1, M_2 - различные точки плоскости. Напишем уравнение прямой (M_1M_2) :

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -a_2 & 0 & a_0 \\ -a_1 & a_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или $-a_0a_0x_0 - a_0a_1x_1 - a_0a_2x_2 = 0$. Это уравнение, после сокращения на a_0, совпадает с (3). Точка M_0 принадлежит (3). ■

Уравнение (3) называется **общим уравнением прямой** проективной плоскости.

Примеры. 1). Напишем уравнение координатных прямых (A_0A_1), (A_2E).

■ Так как $A_0(1:0:0)$, $A_1(0:1:0)$, $E(1:1:1)$, то

$$(A_0A_1) : \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (A_2E) : \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или $(A_0A_1) : x_2 = 0$, $(A_2E) : x_0 - x_1 = 0$.■

2). Найти точку пересечения прямой l_1, заданной уравнением (3), и прямой l_2 : $b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$.

■ Система уравнений, составленная из уравнений этих прямых, имеет следующее решение:

$$M\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}\right). \tag{4}$$

Проверяется утверждение непосредственными вычислениями. ■

3). На расширенной аффинной плоскости в аффинной системе координат $R_1 = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ дана прямая $l : ax + by + c = 0$. Найти однородные координаты несобственной точки прямой l в проективной системе координат $R = (O, X_\infty, Y_\infty, E)$ (см. §11.8), X_∞, Y_∞ - бесконечно удаленные точки осей OX, OY системы координат R_1 соответственно.

■ Как и в примере 1, можно написать уравнение несобственной прямой $(X_\infty Y_\infty)$: $x_0 = 0$. Возьмем две точки на прямой l: $A(-\frac{c}{a}, 0)$, $B(0, -\frac{c}{b})$. Перейдем к однородным координатам по формулам 2 §11.8: $A(a : -c : 0)$, $B(b : 0 : -c)$ и, применяя (2), напишем уравнение расширенной (проективной) прямой l: $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$. Находим теперь координаты точки пересечения несобственной прямой и расширенной прямой l по формуле (4): $M(0 : b : -a)$. ■

10.10 Проективные отображения проективных пространств

Пусть E^n, E^n_1 - проективные пространства с проективными системами координат R и R' соответственно. Отображение $f : E^n \to E^n_1$, ставящее в соответствие точке $M \in E^n$ с координатами $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ в R точку $M' \in E^n_1$ с теми же координатами $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ в R', называется проективным отображением пространства E^n в пространство E^n_1.

Будем говорить, что проективное отображение f задано парой систем координат (R, R').

Проективное отображение пространств биективно, так как у точки $M'(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in E^n_1$ прообразом будет точка $M(x_0 : x_1 : ... : x_n) \in E^n$, а образы двух различных точек - различны. Поэтому проективное отображение проективного пространства на себя $f : E^n \to E^n$ называется преобразованием проективного пространства E^n. Проективное преобразование имеет обратное преобразование f^{-1} и, если преобразование f задано парой систем координат (R, R'), то преобразование f^{-1} задается парой (R', R). Тождественное преобразование $I : E^n \to E^n$ задается парой (R, R).

Пример. Пусть проективное отображение f задано парой систем координат $R = (A_0, A_1, ..., A_n, E)$, $R' = (A'_0, A'_1, ..., A'_n, E')$. Тогда $f(A_i) = A'_i$, $f(E) = E'$.

Отметим одно свойство проективного отображения проективных плоскостей.

Пусть $f : E_1 \to E_2$ - проективное отображение проективных плоскостей, заданное системами координат (R_1, R_2), $l \subset E_1^2$ - прямая. Тогда $l' = f(l)$ - прямая в E_2.

■ Пусть прямая $l \subset E_1$ задана уравнением $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ в системе координат R_1. Пусть прямая $l' \subset E_2$ задана тем же уравнением в системе координат R_2. Если $M' = f(M)$, то точки M и M' имеют одинаковые координаты в R_1, R_2 соответственно, поэтому $M \in l \iff a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \iff M' \in l'$. Таким образом, $l' = f(l)$.■

Лемма 10.6 *Пусть $R = (A_0, A_1, ..., A_n, E)$ проективная система координат в проективном пространстве E_1^n, $f : E_1^n \to E_2^n$ проективное отображение и $A'_i = f(A_i)$, $n = 1, 2$, $E' = f(E)$. Тогда точки $A'_0, A'_1, ..., A'_n, E'$ образую проективную систему координат в E_2^n. При этом будем писать $R' = f(R)$.*

■ При $n = 1$ точки A'_0, A'_1, E' образуют систему координат так как они попарно различны в силу биективности проективного отображения. При $n = 2$ точки A'_0, A'_1, A'_2, E' образуют систему координат так как это точки общего положения. Действительно, если допустить, что три из них лежат на одной прямой, то их прообразы также будут лежать на одной прямой в силу доказанного свойства. Это противоречит тому, что R есть система координат. Случай $n > 2$ доказывается аналогично. ■

Лемма 10.7 *Проективное отображение f может быть задано любой парой соответствующих систем координат: если R - проективная система координат, $R' = f(R)$, то проективное преобразование f можно задать парой систем координат (R, R') в смысле определения.*

■ Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 5.2. ■

Теорема 10.3 *Пусть $P = (E_1, V_1, \pi_1)$, $Q = (E_2, V_2, \pi_2)$ - два n-мерных проективных пространства. Пусть $\varphi : V_1 \to V_2$ - изоморфизм векторных пространств. Тогда отображение $\psi : E_1 \to E_2$ такое, что*

$$\psi \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \varphi \tag{1}$$

есть проективное отображение проективных пространств P и Q.

■ 1). Пусть вектор $\overline{M}_1 \in V_1$ порождает точку $M_1 \in E_1$. Тогда вектор $\overline{M}_2 = \varphi(\overline{M}_1)$ порождает точку $M_2 = \psi(M_1)$.

Действительно, так как φ - изоморфизм векторных пространств, то из (1) следует, что $\pi_2 = \psi \circ \pi_1 \circ \varphi^{-1}$. Поэтому $\pi_2(\overline{M}_2) = \pi_2(\varphi(\overline{M}_1)) = (\psi \circ \pi_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(\overline{M}_1)) = (\psi \circ \pi_1)((\varphi^{-1} \circ \varphi)(\overline{M}_1)) = (\psi \circ \pi_1)(\overline{M}_1) = \psi(M_1) = M_2$.

2). Пусть $R_1 = (A_0, A_1, ..., A_n, D_1)$ - проективная система координат в P, $A_i' = \psi(A_i)$, $D_2 = \psi(D_1)$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда $R_2 = (A_0', A_1', ..., A_n', D_2)$ - проективная система координат в Q.

Действительно, пусть $B_1 = \{\overline{A}_0, \overline{A}_1, ..., \overline{A}_n\}$ - базис в V_1, согласованный с системой координат R_1, вектор $\overline{D}_1 = \overline{A}_0 + \overline{A}_1 + ... + \overline{A}$ - порождает точку D_1. Согласно доказанному в 1), векторы $\overline{A}_i' = \varphi(\overline{A}_i)$ и $\overline{D}_2 = \varphi(\overline{D}_1)$ порождают точки A_i' и D_2, $i = 0, 1, ..., n$. Изоморфизм φ преобразует базисные векторы в базисные, поэтому любые $n+1$ вектор из множества векторов $\overline{D}_1$, $\overline{A}_i'$, $i = 0, 1, ..., n$, образуют базис векторного пространства V_2. Поэтому R_2 - проективная система координат в Q по определению.

Покажем, что базис $B_2 = \{\overline{A}_0', \overline{A}_1', ..., \overline{A}_n'\}$ согласован с системой координат R_2. Так как векторы $\overline{A}_i'$ порождают точки A_i', $i = 0, 1, ..., n$, то достаточно проверить, что $\pi_2(\overline{A}_0' + \overline{A}_1' + ... + \overline{A}_n') = D_2$: $\pi_2(\overline{A}_0' + \overline{A}_1' + ... + \overline{A}_n') = \pi_2(\varphi(\overline{A}_0) + \varphi(\overline{A}_1) + ... + \varphi(\overline{A}_n)) = \pi_2(\varphi(\overline{A}_0 + \overline{A}_1 + ... + \overline{A}_n) = (\psi \circ \pi_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(\overline{A}_0 + \overline{A}_1 + ... + \overline{A}_n)) = (\psi \circ \pi_1)((\varphi^{-1} \circ \varphi)(\overline{A}_0 + \overline{A}_1 + ... + \overline{A}_n)) = \psi(\pi_1(\overline{A}_0 + \overline{A}_1 + ... + \overline{A}_n)) = \psi(D_1) = D_2$.

3). Пусть теперь $M_2 = \psi(M_1)$. Покажем, что точки M_1 и M_2 имеют одинаковые координаты в системах координат R_1 и R_2.

Пусть M_1 имеет координаты $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ в системе координат R_1. Тогда вектор $\overline{M}_1 = x_0\overline{A}_0 + x_1\overline{A}_1 + ... + x_n\overline{A}_n$ порождает точку M_1. Согласно 1), вектор $\overline{M}_2 = \varphi(\overline{M}_1) = \varphi(x_0\overline{A}_0 + x_1\overline{A}_1 + ... + x_n\overline{A}_n) = \varphi(x_0\overline{A}_0) + \varphi(x_1\overline{A}_1) + ... + \varphi(x_n\overline{A}_n) = x_0\varphi(\overline{A}_0) + x_1\varphi(\overline{A}_1) + ... + x_n\varphi(\overline{A}_n) = x_0\overline{A}_0' + x_1\overline{A}_1' + ... + x_n\overline{A}_n'$ порождает точку M_2. Так как базис B_2 согласован с R_2, то $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ являются координатами точки M_2 в системе координат R_2. ■

Задача. Доказать независимость построений точек в §11.8 от выбора точки O.

Аналитическое задание проективного преобразования.

Напишем формулы, задающие проективное преобразование f проективной плоскости в проективной системе координат R, то есть решим следующую задачу: пусть в системе координат R точка $M'(y_0 : y_1 : y_2)$ есть образ точки $M(x_0 : x_1 : x_2)$ относительно f. Выразим координаты точки M' через координаты точки M.

■ Пусть $R' = f(R)$. По лемме 11.7 преобразование f можно задать парой систем координат (R, R'). Так как преобразование f ставит в соответствие точки с одинаковыми координатами в R и R', то точка M' имеет координаты $(y_0 : y_1 : y_2)$ в системе координат R и координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ в системе координат R'. По формулам преобразования координат, можно записать, что при некотором $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} \lambda y_0 &= a_{00}x_0 + a_{10}x_1 + a_{20}x_2, \\ \lambda y_1 &= a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2, \\ \lambda y_2 &= a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\det(a_{ij}) \neq 0$ и выполняются соотношения (3) §11.7. ■

Верно и обратное утверждение: формулы (1) при условии, что $\det(a_{ij}) \neq 0$ и выполняются соотношения (3) §11.7, задают в произвольной выбранной системе координат R проективное преобразование плоскости.

■ Из условия следует, что точки $A_i'(a_{i0} : a_{i1} : a_{i2})$, $E'(a_{00} + a_{10} + a_{20}, a_{01} + a_{11} + a_{21}, a_{02} + a_{12} + a_{22})$, $i = 0, 1, 2$, являются базисными точками некоторой проективной системы координат R'. Если теперь напишем формулы проективного преобразования плоскости, заданного системами координат R и R', то получим, конечно, формулы (1). ■

Следствие. Из (1) получаем формулы, задающие проективное преобразование евклидовой плоскости в неоднородных координатах:

$$x' = \frac{a_{01} + a_{11}x + a_{21}y}{a_{00} + a_{10}x + a_{20}y},$$
$$y' = \frac{a_{02} + a_{12}x + a_{22}y}{a_{00} + a_{10}x + a_{20}y}.$$

Отсюда следует, что аффинное преобразования являются частным случаем проективного преобразования.

Проективная геометрия.

Пусть G - множество всех преобразований проективного пространства E^n. Множество G является группой относительно композиции преобразований. Пусть $H \subset G$ - множество всех проективных преобразований пространства E^n. Из определения проективного преобразования следует, что если $f \in H$, то и обратное к f преобразование $f^{-1} \in H$, а из леммы 11.7 следует, что композиция двух проективных преобразований есть проективное преобразование. Отсюда следует, что H есть подгруппа группы G.

Проективной геометрией называется совокупность тех свойств фигур проективного пространства E^n, которые не меняются при всевозможных проективных преобразованиях пространства E^n.

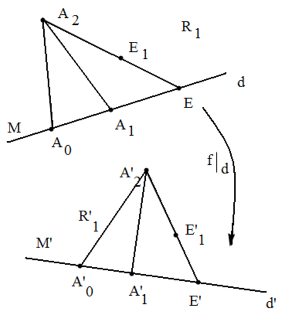
10.11 Свойства проективных преобразований плоскости

Приведем основные свойства проективных преобразований проективной плоскости.

1). Образ прямой при проективном преобразовании - прямая (§11.10).

2). Пусть f - проективное преобразование плоскости E, d - прямая, d' - образ прямой d. Сужение $f|_d : d \to d'$ есть проективное отображение проективной прямой d в проективную прямую d'.

■ Пусть $R = (A_0, A_1, E)$ проективная система координат на d, точки A'_0, A'_1, E' - образы соответствующих базисных точек R. Так как f - биекция, то точки A'_0, $A'_1, E' \in d'$ будут базисными точками некоторой системы координат R' на d. Покажем, что сужение $f|_d : d \to d'$ есть проективное отображение, заданное парой систем координат (R, R'). Включим системы координат R, R' в системы координат плоскости следующим образом: пусть точка A_2 не лежит на d, точка E_1 принадлежит прямой A_2E и не совпадает с точками A_2 и E. Пусть точки A'_2 и E'_1 есть образы точек A_2 и E_1 относительно f. Тогда отображение f можно задать парой систем координат $R_1 = (A_0, A_1, A_2, E_1)$, $R'_1 = (A'_0, A'_1, A'_2, E'_1)$. Пусть $M(x_0 : x_1)$ произвольная точка прямой d, заданная в системе координат $R = (A_0, A_1, E)$. По лемме 4 точка M имеет координаты $(x_0 : x_1 : 0)$ в системе координат R_1. Так как отображение f задано парой систем координат R_1 и R'_1, то точка $M' = f(M)$ будет иметь те же координаты $(x_0 : x_1 : 0)$ в системе координат R'_1. По лемме 4 точка M' будет иметь координаты $(x_0 : x_1)$ в системе координат R'. Следовательно, отображение $f|_d : d \to d'$ есть проективное отображение проективных прямых. ■



3). Любое проективное преобразование плоскости имеет инвариантную (то есть, неподвижную) точку.

■ Точка M является инвариантной точкой проективного преобразования f, если $f(M) = M$. Пусть $(x_0 : x_1 : x_2)$ координаты инвариантной точки в некоторой системе координат R. Пусть преобразование f задано формулами

$$\lambda y_i = \sum_{j=0}^{2} a_{ij}x_j, \quad i = 0, 1, 2, \tag{1}$$

где $\det(a_{ij}) \neq 0$. Тогда для координат инвариантной точки можно записать:

$$\begin{cases} \lambda x_0 = a_{00}x_0 + a_{10}x_1 + a_{20}x_2, \\ \lambda x_1 = a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2, \\ \lambda x_2 = a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \tag{2}$$

или

$$\begin{cases} (a_{00} - \lambda)x_0 + a_{10}x_1 + a_{20}x_2 = 0, \\ a_{01}x_0 + (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{21}x_2 = 0, \\ a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система будет иметь ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda & a_{10} & a_{20} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{20} & a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель слева есть кубический многочлен относительно λ, следовательно, найдется ненулевое действительное число λ, при котором определитель равен нулю. Подставим найденное ненулевое λ в систему (2) и найдем решение (2) отличное от нуля. Точка с такими координатами будет инвариантной точкой преобразования f. ■

4). Любое проективное преобразование плоскости имеет инвариантную прямую.

■ Прямая l является инвариантной прямой проективного преобразования f, если $f(l) = l$ или $l = f^{-1}(l)$ (прообраз инвариантной прямой l есть прямая l). Пусть $l : a_0y_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0$ - инвариантная прямая. Уравнение прообраза прямой l относительно преобразования (1) примет вид

$$a_0 \sum_{j=0}^{2} a_{0j}x_j + a_1 \sum_{j=0}^{2} a_{j1}x_j + a_2 \sum_{j=0}^{2} a_{j2}x_j = 0.$$

Сгруппируем слагаемые с x_j :

$$\sum_{j=0}^{2}(\sum_{i=0}^{2} a_i a_{ij})x_j = 0.$$

Так как l - инвариантная прямая, то $l = f^{-1}(l)$, то есть коэффициенты в уравнениях l и $f^{-1}(l)$ пропорциональны:

$$\lambda a_j = \sum_{i=0}^{2} a_i a_{ij}, \quad j = 0, 1, 2.$$

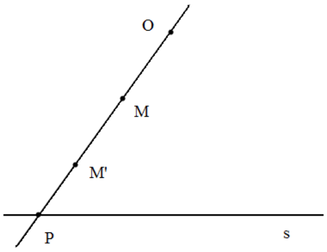
Так же, как и в п.3, устанавливается, что такая система имеет ненулевое решение при некотором ненулевом λ. Найденное решение и будет координатами инвариантной прямой. ■

10.12 Гомология

Гомология - это проективное преобразование плоскости, имеющее прямую, все точки которой - инвариантны.

Гомология, как и любое проективное преобразование, имеет неподвижную точку (свойство 3, §11.10). Она называется центром гомологии. Прямая инвариантных точек называется осью гомологии. Центр гомологии может принадлежать оси гомологии.

Пример. Пусть проективное преобразование f имеет три инвариантные точки A, B, C, принадлежащие одной прямой l. Тогда f - гомология.

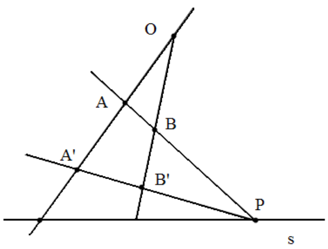


■ Прямая l - инвариантная прямая преобразование f. Сужение $f|_l : l \to l$ как проективное преобразование прямой, можно задать парой соответствующих систем координат (R, R), где $R = (A, B, C)$. Точки M и $M' = f(M)$ имеют одинаковые координаты в одной и той же системе координат R. Поэтому $M = M'$ и $f|_l$ - тождественное преобразование прямой l, то есть l - прямая инвариантных точек преобразования f. ■ Пусть f - гомология с центром в точке O и осью s, $O \notin s$. Если $M' = f(M)$, то прямая (MM') проходит через точку O. ■ Действительно, точка $P = (OM) \cap s$ - неподвижная точка гомологии, поэтому прямая (OP) преобразуется в себя. Значит, точка $M' \in (OP)$.■

Если вне оси гомологии нет неподвижных точек, то считается, что центр гомологии есть единственная точка, принадлежащая оси s и прямой (MM'), где M, M' - соответствующие точки.

Построение гомологичных точек.

Пусть гомологи f задана осью s, центром O и парой соответствующих точек $A \to A'$. Построить образ данной точки B.



■ Пусть $P = (AB) \cap s$, тогда $B' = (OB) \cap (A'P)$ - образ точки B. Действительно, прямая (AP) преобразуется в прямую $(A'P)$, прямая (OB) преобразуется в себя, поэтому $B' = (OB) \cap (A'P)$. Если точка $B \in (AA')$, то возьмем произвольную точку $C \notin (OA)$ и построим ее образ C'. Потом строим точку B', используя пару соответствующих точек C, C'. ■

Теорема 10.4 *Пусть s - прямая проективной плоскости, точки O, A, A' попарно различны и принадлежат одной прямой, причем $A, A' \notin s$.*

Существует единственная гомология f с осью s, центром O и соответствующими точками A, $A' : A' = f(A)$.

■ 1). Рассмотрим случай, когда точка $O \notin s$. Пусть $P = s \cap (OA)$, точки B, C различны, принадлежат прямой s и отличны от P. Пусть f проективное преобразование плоскости, заданное парой систем координат $R = (O, A, B, C)$ и $R' = (O, A', B, C)$. Преобразование f преобразует прямую $s = (BC)$ в себя, прямую (OA) - в прямую (OA'). Следовательно, точка P неподвижная точка преобразования f. Так как f оставляет на месте три точки прямой s, то f - гомология, обладающая нужными свойствами.

2). Пусть теперь $O \in s$. Возьмем точку B, не принадлежащую прямым s и (AA'). Обозначим через $Q = (AB) \cap s$, $B' = (A'Q) \cap (OB)$. Пусть несовпадающие точки P, L принадлежат прямой s и отличны от точек O и Q. Пусть f проективное преобразование плоскости, заданное парой систем координат $R = (A, B, P, L)$ и $R' = (A', B', P, L)$. Преобразование f преобразует прямую $s = (PL)$ в себя, прямую (AB) - в прямую $(A'B')$. Следовательно, точка Q неподвижная точка преобразования f. Так как f оставляет на месте три точки прямой s, то f - гомология, обладающая нужными свойствами.

Единственность гомологии следует из построения гомологичных точек. ■

Частные случаи гомологии на расширенной аффинной плоскости.

1). Гомология f задана собственной осью s, несобственным центром O и соответствующими точками A, A'. Такая гомология называется **родственным преобразованием** или **родством.**

2). Гомология f задана несобственной осью s, собственным центром O и соответствующими точками A, A'. В этом случае сужение гомологии f на множество всех собственных точек (аффинную плоскость) будет гомотетией с центром в точке O и коэффициентом гомотетии равным $\frac{OA'}{OA.}$

3). Гомология f задана несобственными осью s и центром O и соответствующими точками A, A'. В этом случае сужение гомологии f на аффинную плоскость будет параллельным переносом на вектор $\overline{AA'}$.

10.13 Пучок прямых проективной плоскости. Перспективное отображение прямой в пучок прямых

Пусть (E^2, V^3, π) проективная плоскость. Обозначим через $p(O)$ множество всех прямых плоскости E^2, проходящих через точку O, то есть пучок прямых с центром в точке O (или просто - пучок). Введем в пучке прямых $p(O)$ структуру проективного одномерного пространства (проективной прямой) естественным образом (точками такой прямой будут прямые пучка).

Пусть вектор $\overline{a} \in V^3$ порождает точку O. Для вектора $\overline{x}$, не параллельного вектору $\overline{a}$, обозначим через $(\overline{a}, \overline{x})$ двумерное подпространство векторного пространства V^3 с базисом $\{\overline{a}, \overline{x}\}$. Пусть $U \subset V^3$ произвольное двумерное подпространство, не содержащее вектор $\overline{a}$, и отображение $\pi_1 : U \setminus \{\overline{0}\} \to p(O)$ определено правилом: $\pi_1(\overline{x}) = \pi((\overline{a}, \overline{x}) \setminus \{\overline{0}\})$.

Покажем, что $(p(O), U, \pi_1)$ - проективная прямая.

■ Проверим выполнение аксиом проективного пространства.

1. Пусть l - произвольная прямая пучка прямых $p(O)$. Прямая l порождена некоторым двумерным подпространством $W \subset V^3$. Подпространство W содержит вектор $\overline{a}$, следовательно не совпадает с U. Поэтому пересечение $U \cap W$ есть одномерное векторное пространство. Если $\overline{e}$ базис $U \cap W$, то $(\overline{a}, \overline{e}) = W$ и поэтому $\pi_1(\overline{e}) = \pi((\overline{a}, \overline{e}) \setminus \{0\}) = \pi(W \setminus \{0\}) = l$. Следовательно, отображение π_1 - сюръективно.

2). Пусть $\pi_1(\overline{x}) = \pi_1(\overline{y})$ или подпространства $(\overline{a}, \overline{x})$ и $(\overline{a}, \overline{y})$ совпадают. Обозначим это подпространство через W. Ясно, что $\overline{x} \in U \cup W$ и $\overline{y} \in U \cup W$, а, так как $U \cup W$ - одномерно, то $\overline{x} || \overline{y}$.

Верно и обратное утверждение: если $\overline{x}, \overline{y} \in W$ и $\overline{x} || \overline{y}$, то $(\overline{a}, \overline{x}) = (\overline{a}, \overline{e})$ или $\pi_1(\overline{x}) = \pi_1(\overline{y})$. ■

Пусть теперь $U_1, U_2 \subset V^3$ два двумерных подпространства, не содержащих вектор $\overline{a}$. Им соответствуют две проективные прямые $(p(O), U_1, \pi_1)$ и $(p(O), U_2, \pi_2)$, где $\pi_i(\overline{x}) = \pi((\overline{a}, \overline{x}) \setminus \{\overline{0}\})$, $\overline{x} \in U_i$, $i = 1, 2$. Покажем, что тождественное отображение $i : p(O) \to p(O)$ есть проективное отображение этих прямых.

■ 1. Построим сначала изоморфизм векторного пространства U_1 на U_2. Пусть $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ - базис в U_1. Для вектора $\overline{e}_1$ найдется число α такое, что $\overline{e}_1 + \alpha\overline{a} \in U_2$. Аналогично, для вектора $\overline{e}_2$ найдется число β такое, что $\overline{e}_2 + \beta\overline{a} \in U_2$. Векторы $\overline{e}_1 + \alpha\overline{a}, \overline{e}_2 + \beta\overline{a}$ образуют базис пространства U_2. Определим отображение $\varphi : U_1 \to U_2$, поставив в соответствие векторы с одинаковыми координатами в этих базисах. Такое отображение будет изоморфизмом векторных пространств. Отметим одно свойство этого изоморфизма. Пусть $\overline{x} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2$ - произвольный вектор из U_1, тогда $\varphi(\overline{x}) = x(\overline{e}_1 + \alpha\overline{a}) + y(\overline{e}_2 + \beta\overline{a}) = (x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2) + (x\alpha + y\beta)\overline{a} = \overline{x} + (x\alpha + y\beta)\overline{a}$. Следовательно

$$(\overline{a}, \overline{x}) = (\overline{a}, \varphi(\overline{x})). \tag{1}$$

2. Проверим теперь выполнение равенства $i \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$: пусть вектор $\overline{x} \in U_1$ - произвольный, тогда $(i \circ \pi_1)(\overline{x}) = i(\pi_1(\overline{x})) = i(\pi((\overline{a}, \overline{x}) \setminus \{\overline{0}\})) = \pi((\overline{a}, \overline{x}) \setminus \{\overline{0}\})$; $(\pi_2 \circ \varphi)(\overline{x}) = \pi_2(\varphi(\overline{x})) = \pi((\overline{a}, \varphi(\overline{x})) \setminus \{\overline{0}\}) \overset{(1)}{=} \pi((\overline{a}, \overline{x}) \setminus \{\overline{0}\})$.

Применяя теорему 11.3, получим, что тождественное отображение $i : p(O) \to p(O)$ является проективным отображением проективной прямой $(p(O), U_1, \pi_1)$ в проективную прямую $(p(O), U_2, \pi_2)$. ■

Таким образом, пучок прямых $p(O)$ можно превратить в проективную прямую многими способами, при этом тождественное отображение пучка прямых будет проективным отображением любой пары таких проективных прямых. *В дальнейшем, говоря о проективной прямой $p(O)$, будем иметь в виду любую из таких проективных прямых.*

Пусть $p(O)$ - пучок прямых на проективной плоскости (E^2, V^3, π), d - прямая, $O \notin d$.

Перспективным отображением прямой d в пучок прямых $p(O)$ называется отображение $f : d \to p(O)$, определенное равенством $f(M) = (OM) \in p(O)$, $M \in d$. При этом, отображение f^{-1} также будем называть перспективным

Теорема 10.5 *Перспективное отображение $f : d \to p(O)$ прямой d в пучок прямых $p(O)$ является проективным отображением проективных прямых.*

■ В условии теоремы прямая и пучок прямых рассматриваются как два проективных одномерных пространства на проективной плоскости (E^2, V^3, π). Если прямая d порождена двумерным подпространством $U \subset V^3$, то прямую d можно рассматривать как одномерную проективную прямую (d, U, π_1), где $\pi_1 = \pi|_U$. Подпространство U не содержит вектор $\overline{a}$, порождающего центр пучка прямых, поэтому можно считать, что пучок прямых есть проективная прямая $(p(O), U, \pi_2)$, где $\pi_2(\overline{x}) = \pi((\overline{a}, \overline{x}) \setminus \{\overline{0}\})$ - прямая пучка, проходящая через точку $\pi(\overline{x})$, для $\overline{x} \in U$. Пусть $j : U \to U$ - тождественное отображение. Покажем, что $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ j$. Пусть $\overline{x} \in U$ - произвольный вектор, $\pi_1(\overline{x}) = M \in d$. Тогда $(f \circ \pi_1)(\overline{x}) = f(\pi_1(\overline{x})) = f(M) = (OM)$. С другой стороны $(\pi_2 \circ j)(\overline{x}) = \pi_2(\overline{x}) = \pi((\overline{a}, \overline{x}) \setminus \{\overline{0}\}) = (O\pi(\overline{x})) = (O\pi_1(\overline{x})) = (OM)$. Из теоремы 11.3 следует, что перспективное отображение f прямой в пучок прямых есть проективное отображение проективных прямых. ■

10.14 Перспективные отображения прямых и пучков прямых проективной плоскости. Задачи на построение

Отображение пучков прямых. Пусть $p(O)$, $p(O')$ два пучка прямых проективной плоскости (E^2, V^3, π).

Отображение $f : p(O) \to p(O')$ называется **перспективным** отображением пучков прямых, если существует прямая s на которой пересекаются соответствующие прямые этих пучков: точка $l \cap f(l) \in s$ для всех $l \in p(O)$. При этом $f((OO')) = (OO')$.

Прямая s называется осью перспективы пучков прямых.

В следующей лемме и далее пучки прямых рассматриваются как проективные прямые.

Лемма 10.8 *Перспективное отображение пучков прямых является проективным отображением.*

■ Если $f : p(O) \to p(O')$ - перспективное отображение пучков прямых, s - ось перспективы, то можно записать, что $f = \varphi \circ \psi$, где $\psi : p(O) \to s$, $\varphi : s \to p(O')$ - перспективные отображения. Так как перспективные отображения по теореме 11.5 являются проективными, а композиция проективных отображений является проективным отображением, то f есть проективное отображение. ■

Лемма 10.9 *Проективное отображение пучков прямых $f : p(O) \to p(O')$ такое, что $f(OO') = (OO')$, является перспективным отображением.*

■ Пусть f задано двумя соответствующими системами координат $R = (m_0, m_1, e)$ и $R' = (m_0', m_1', e')$, где $e = e' = (OO')$. Пусть прямая s проходит через точки $m_0 \cap m_0'$ и $m_1 \cap m_1'$. Пусть f' - перспективное отображение пучков $p(O) \to p(O')$ с осью s. По лемме 11.8 f' - проективное отображение, по лемме 11.7 проективное отображение f' можно задать любой парой соответствующих систем координат, например, парой R и R' как и f. Следовательно $f = f'$. ■

Отображение прямых. Перспективным отображением прямых d, d' из центра $O \notin d \cup d'$ называется отображение $d \to d'$ определенное правилом: точке $M \in d$ ставится в соответствие точка $(OM) \cap d'$. Иногда перспективное отображение прямых называют проектированием прямой d на прямую d' из центра O. Точка O называется центром перспективы.

Лемма 10.10 *Перспективное отображение прямых является проективным отображением.*

■ Действительно, любое перспективное отображение прямых можно представить как композицию двух проективных отображений - прямой в пучок и пучка в прямую. ■

Лемма 10.11 *Проективное отображение прямых $f : d \to d'$ будет перспективным отображением, если $f(d \cap d') = d \cap d'$.*

■ Пусть f задано двумя соответствующими системами координат $R = (A, B, C)$ и $R' = (A', B', C')$, где $C = d \cap d'$. Пусть $O = (AA') \cap (BB')$ и f' - перспективное отображение прямых $d \to d'$ из центра O. Тогда f' - проективное отображение, заданное парой систем координат R и R'. Следовательно $f = f'$. ■

Подведем итог.

Теорема 10.6 *Проективное отображение прямых $f : d \to d'$ есть композиция перспективных отображений.*

■ Пусть $f : d \to d'$ заданное парой систем координат: $R = (A, B, C)$, $R' = (A', B', C')$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть прямые d и d' не совпадают. Так как прямые не совпадают, то можно считать, что $A \neq A'$. На прямой (AA') возьмем точки O и O', не совпадающие с точками A и A'. Пусть прямая s проходит через точки $(OB) \cap (O'B')$ и $(OC) \cap (O'C')$. Пусть $\varphi : d \to p(O)$, $\psi : p(O') \to d'$ - перспективные отображения прямых и пучков и $g : p(O) \to p(O')$ - перспективное отображение пучков прямых с осью s. Тогда композиция $\psi \circ g \circ \varphi$ есть проективное отображение прямой d в прямую d', заданное парой систем координат R и R'. Следовательно, $f = \psi \circ g \circ \varphi$.

2) Пусть теперь $d = d'$. Возьмем прямую d', не равную d, и пусть точка $O \notin d \cup d'$. Рассмотрим перспективное отображение $g : d' \to d$ с центром в точке O и пусть $R'' = (A'', B'', C'')$ - прообраз системы координат R' относительно g. Рассмотрим проективное отображение $\varphi : d \to d'$, заданное парой систем координат R и R''. По пункту 1) оно будет композицией перспективных отображений. Тогда $f = g \circ \varphi$ и, как композиция перспективных отображений, будет перспективным отображением. ■

Рассмотрим три задачи на построение одной линейкой на расширенной аффинной плоскости.

Задача 1. Пусть $f : d \to d'$ проективное отображение несовпадающих прямых, заданное парой систем координат: $R = (A, B, C)$, $R' = (A', B', C')$ и $M \in d$. Построить точку $M' = f(M)$.

Построение. Так как прямые не совпадают, то можно считать, что $A \neq A'$. На прямой (AA') возьмем точки O и O', не совпадающие с точками A и A'. Пусть прямая s проходит через точки $(OB) \cap (O'B')$ и $(OC) \cap (O'C')$. Если точка $K = s \cap (OM)$, то $f(M) = d' \cap (O'K)$.

Обоснование построения - в части 1) доказательства теоремы 11.6.

Задача 2. Пусть $f : d \to d$ проективное преобразование прямой d, заданное парой систем координат: $R = (A, B, C)$, $R' = (A', B', C')$ и $M \in d$. Построить точку $M' = f(M)$.

Построение. Возьмем прямую d'', не равную d, и пусть точка $O \notin d \cup d''$. Пусть система координат $R'' = (A'', B'', C'')$ на прямой d'' такая, что $A'' = (OA') \cap d''$, $B'' = (OB') \cap d''$, $C'' = (OC') \cap d''$, Для проективного отображения $g : d \to d''$, заданного системами координат $R = (A, B, C)$, и $R'' = (A'', B'', C'')$ решаем задачу 1 для точки M. Получаем точку $M'' \in d''$. Тогда $M = (OM'') \cap d$.

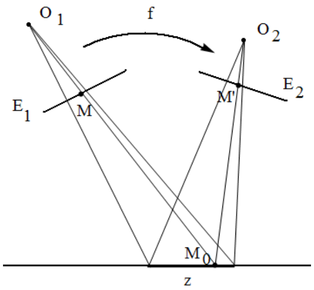
Обоснование построения - в части 2) доказательства теоремы 11.6.

Задача 3. Пусть $f : p(A_0) \to p(A_1)$ проективное отображение пучков прямых, заданное парой систем координат: $R = (a, b, c)$, $R' = (a', b', c')$, и $l \in p(A_0)$. Построить прямую $l' = f(l)$.

■ Через точку $A = a \cap a'$ проведем две произвольные прямые d_0 и d_1. Проективное отображение пучков прямых f порождает отображение прямых $\varphi : d_0 \to d_1$ следующим образом: $M' = \varphi(M) \iff f((A_0M)) = (A_1M')$. Отображение φ есть композиция трех проективных отображений $d_0 \to p(A_0)$, f, $p(A_1) \to d_1$, поэтому φ - проективное отображение, а так как $\varphi(A) = A$, то φ - перспективно. По лемме 11.11 отображение φ имеет центр перспективы. Построим центр перспективы S. Пусть $B = b \cap d_0$,

$C = c \cap d_0$, $B' = b' \cap d_1$ $C' = c' \cap d_1$. Тогда $S = (BB') \cap (CC')$. Пусть $M = l \cap d_0$, тогда $M' = \varphi(M) = (MS) \cap d_1$, а $l' = (A_1 M')$. ■

Приложение к аэрофотосъемке - склеивание двух фотографий по их общей части. Пусть E_1 и E_2 две фотографии пересекающихся областей на земле, полученные из двух положений самолета O_1 и O_2. Определим отображение f тех частей фотографий E_1 и E_2, на которых изображена одна и та же область z по следующему правилу $M \in E_1 \to (O_1 M) \in p(O_1) \to M_0 = (O_1 M) \cap z \to (O_2 M_0) \in p(O_2) \to M' = (O_2 M_0) \cap E_2$. Отображение f как композиция перспективных отображений будет проективным отображением. Соответствующие точки в отображении f есть фотографии одной и той же точки поверхности.



Проективное отображение f можно задать любой парой соответствующих систем координат R и R'. Совместим фотографии так, чтобы соответствующие точки систем координат R и R' совпали. Тогда точки M и M', как имеющие одинаковые координаты в R и R', также совпадут. Таким образом, чтобы совместить две фотографии достаточно совместить четыре одинаковые точки этих фотографий.

Приведенный случай склеивания фотографий достаточно идеален. На самом деле земная поверхность представляет собой не плоскость, а эллипсоид и склейка фотографий проводится в трехмерном пространстве.

10.15 Сложное отношение четырех точек

Пусть R - проективная система координат на проективной прямой d.

Сложным отношением $(AB; CD)$ четырех точек $A(x_0 : x_1)$, $B(y_0 : y_1)$, $C(z_0 : z_1)$, $D(u_0 : u_1)$, $(A \neq D, B \neq C)$, принадлежащих прямой d, называется число, равное

$$(AB; CD) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ u_0 & u_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ u_0 & u_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix}}. \tag{1}$$

Сложное отношение четырех точек иногда называют **двойным отношением** или **ангармоническим отношением** четырех точек.

Сложное отношение четырех точек не зависит от выбора системы координат на прямой d.

■ Пусть R' - еще одна система координат на прямой d и $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$, $\overline{z}_i$, $\overline{u}_i$, $i = 0, 1$, координаты точек A, B, C, D соответственно в системе координат R'. По формулам преобразования координат можно записать: $\rho x_0 = c_{00}\overline{x}_0 + c_{10}\overline{x}_1$, $\rho x_1 = c_{01}\overline{x}_0 + c_{11}\overline{x}_1$, аналогично $\rho z_0 = c_{00}\overline{z}_0 + c_{10}\overline{z}_1$, $\rho z_1 = c_{01}\overline{z}_0 + c_{11}\overline{z}_1$ и так далее. Отсюда получаем, что

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{00}\overline{x}_0 + c_{10}\overline{x}_1 & c_{01}\overline{x}_0 + c_{11}\overline{x}_1 \\ c_{00}\overline{z}_0 + c_{10}\overline{z}_1 & c_{01}\overline{z}_0 + c_{11}\overline{z}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{10} \\ c_{01} & c_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overline{x}_0 & \overline{x}_1 \\ \overline{z}_0 & \overline{z}_1 \end{vmatrix}$$

и так далее.

Подставим все так найденные определители в формулу (1), определители $\det(c_{ij})$ сократим и получим, что сложное отношение $(AB; CD)$ вычисляется по этой же формуле (1), но уже в системе координат R'. ■

Лемма 10.12 *Пусть E^2 - проективная плоскость с проективной системой координат $R = (A_0, A_1, A_2, E)$ и точки $A(x_0 : x_1 : x_2)$, $B(y_0 : y_1 : y_2)$, $C(z_0 : z_1 : z_2)$, $D(u_0 : u_1 : u_2)$ лежат на прямой $d \subset E^2$. Тогда, если координатная точка $A_k \notin d$, то*

$$(AB;CD) = \frac{\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ z_i & z_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i & y_j \\ u_i & u_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ u_i & u_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{vmatrix}}, \tag{2}$$

$i \neq j$, $i \neq k$, $k \neq j$, $i, j, k = 0, 1, 2$.

■ Докажем равенство (2), например, для $i = 0$, $j = 2$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть R_0 - проективная система координат на d. Так как $A_1 \notin d$, то спроектируем прямую d на координатную прямую (A_0A_2) из точки A_1. Пусть R_0' - проекция R_0, A', B', C', D' - проекции точек A, B, C, D. Перспективное отображение $d \to (A_0A_2)$ является проективным отображением, поэтому точки A, B, C, D в системе координат R_0 и точки A', B', C', D' в системе координат R_0' имеют одинаковые координаты. Поэтому $(AB;CD) = (A'B';C'D')$ и для доказательства леммы достаточно найти последнее сложное отношение. Так как сложное отношение не зависит от выбора системы координат на прямой, то найдем сложное отношение $(A'B';C'D')$ в системе координат $R_1 = (A_0, A_1, E_1)$, где E_1 - проекция точки E на прямую (A_0A_2) из точки A_1. По лемме о проекции $A(x_0 : x_2)$, $B(y_0 : y_2)$, $C(z_0 : z_2)$, $D(u_0 : u_2)$, а из (1) следует утверждение леммы для $i = 0$, $j = 2$. ■

Свойства сложного отношения:

1). Пусть точка $D(u_0 : u_1)$ в системе координат $R = (A, B, C)$. Тогда $(AB;CD) = \frac{u_0}{u_1}$.

■ Для доказательства достаточно подставить в (1) координаты базисных точек $A(1 : 0)$, $B(0 : 1)$, $C(1 : 1)$ и точки D. ■

Отсюда следует, что равенство $(AB;CD) = (AB;CD_1)$ влечет совпадение точек D и D_1 в случае, когда точки A, B, C попарно различны.

■ Действительно, если $D(u_0 : u_1)$, $D_1(v_0 : v_1)$ в системе координат $R = (A, B, C)$, то из свойства 1) получим, что $\frac{u_0}{u_1} = \frac{v_0}{v_1}$, или $D(u_0 : u_1) = D_1(v_0 : v_1)$. ■

Отметим, что, если точки A, B, C попарно различны, то из равенства $(AB;CD) = 1$ следует, что $C = D$. Действительно, из (1) находим, что $(AB;CC) = 1$, а из предыдущего замечания и равенства $(AB;CD) = 1$ следует, что $C = D$.

2). Сложное отношение четырех точек есть инвариант проективного отображения, то есть, если $f : d_1 \to d_2$ - проективное отображение прямых, точки $A, B, C, D \in d_1$ $A', B', C', D' \in d_2$ их образы, то $(AB;CD) = (A'B';C'D')$.

■ Так как сложное отношения не зависит от выбора системы координат, то сложные отношения соответствующих точек можно вычислить в соответствующих, относительно f, системах координат. Теперь доказательство следует из определения проективного отображения. ■

3). Для сложного отношения справедливы следующие равенства:

$(AB;CD) = (CD;AB) = \frac{1}{(BA;CD)} = \frac{1}{(AB;DC)}$, $(AB;CD) + (AC;BD) = 1$.

■ Доказательство проводится непосредственным вычислением частей равенств по формулам (1). ■

4). Пусть d - расширенная аффинная прямая, A, B, C, D - собственные точки с аффинными координатами x, y, z, u соответственно в системе координат $R_a = (A_1, \overline{A_1E})$.

Тогда
$$(AB;CD) = \frac{(z-x)(u-y)}{(u-x)(z-y)}. \tag{3}$$

■ Рассмотрим проективную систему координат $R = (A_1, A_\infty, E)$. Тогда по однородным координатам данных точек $A(x_0 : x_1)$, $B(y_0 : y_1)$, $C(z_0 : z_1)$, $D(u_0 : u_1)$ из формулы (1) получим:
$$(AB;CD) = \frac{(x_0z_1 - x_1z_0)(u_1y_0 - u_0y_1)}{(x_0u_1 - u_0x_1)(y_0z_1 - y_1z_0)} = \frac{(\frac{z_1}{z_0} - \frac{x_1}{x_0})(\frac{u_1}{u_0} - \frac{y_1}{y_0})}{(\frac{u_1}{u_0} - \frac{x_1}{x_0})(\frac{z_1}{z_0} - \frac{y_1}{y_0})}.$$
Применяя теперь формулы (1) §11.8, получим (3). ■

Сложное отношение четырех прямых пучка $p(O)$. Если рассматривать пучок прямых проективной плоскости как 1-мерное проективное пространство, то сложное отношение $(mn;pq)$ четырех прямых m, n, p, q пучка можно найти по формуле (1).

Если прямая d, не проходящая через центр пучка O, пересекает прямые m, n, p, q по точкам A, B, C, D соответственно, то из теоремы 11.5 и свойства 2 следует, что $(AB;CD) = (mn;pq)$.

10.16 Гармоническая четверка точек

Гармонической четверкой точек называется множество, состоящее из четырех точек A, B, C, D одной прямой, такое, что сложное отношение $(AB;CD) = -1$.

При этом говорят, что точки C, D гармонически разделяют точки A и B. Так как $(AB;CD) = (CD;AB)$, то и точки A, B гармонически разделяют точки C и D.

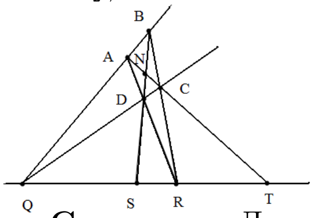
Четырехвершинником называется фигура, состоящая из четырех точек общего положения и шести прямых, проходящих через эти точки. Обозначение четырехвершинника: $ABCD$; точки A, B, C, D называются вершинами четырехвершинника; прямые, проходящие через эти точки - сторонами. Стороны, не имеющие общих вершин, называются противоположными, (AB) и (CD), (AC) и (BD), (BC) и (AD) - три пары противоположных сторон. Точки пересечения противоположных сторон называются диагональными точками четырехвершинника.

Заметим, что у любого четырехвершинника диагональные точки не лежат на одной прямой.

■ Пусть $ABCD$ -четырехвершинник. Для доказательства утверждения рассмотрим проективную систему координат $R = (A, B, C, D)$ и найдем координаты диагональных точек этого четырехвершинника. Решая систему, составленную из уравнений прямых $(AB) : x_2 = 0$ и $(DC) : x_0 - x_1 = 0$, получим координаты диагональной точки $Q = (AB) \cap (DC) : Q(1 : 1 : 0)$. Аналогично, рассматривая прямые $(AD) : x_1 - x_2 = 0$, $(BC) : x_0 = 0$, получим координаты точки $R = (AD) \cap (BC) : R(0 : 1 : 1)$, а рассматривая прямые $(AC) : x_1 = 0$ и $(BD) : x_0 - x_2 = 0$, получим координаты третьей диагональной точки $P = (AC) \cap (BD) : P(1 : 0 : 1)$. Легко проверить, что диагональная точка Q не принадлежит прямой $PR : x_0 + x_1 - x_2 = 0$. ■

Теорема 10.7 *Пусть Q, R - диагональные точки четырехвершинника, а S, T - точки пересечения диагонали (QR) со сторонами четырехвершинника, проходящими через третью диагональную точку. Тогда точки S, T гармонически разделяют точки Q, R.*

■ Спроектируем прямую (QT) на прямую (AT) из точки B, а затем прямую (AT) спроектируем на прямую (QT) из точки D. Тогда $Q \to A \to R$, $S \to N \to S$, $R \to C \to Q$, $T \to T \to T$. Следовательно, $(QR, ST) = (RQ, ST)$ или $(QR, ST) = \frac{1}{(QR,ST)}$.

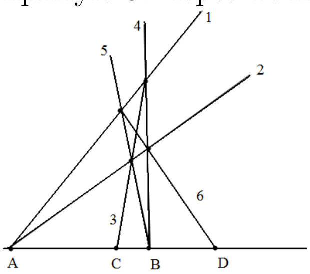


Отсюда $(QR, ST)^2 = 1$ или $(QR, ST) = \pm 1$. Диагональные точки Q и R не совпадают, поэтому из равенства $(QR, ST) = 1$ следовало бы, что $S = T$, что невозможно - вершины четырехвершинника лежали бы на одной прямой. Остается равенство $(QR, ST) = -1$. ■

Следствие. Доказали также, что $(AC; NT) = -1$, а рассматривая проектирование прямой (AT) на прямую (DB) из точки $Q : (BD; NS) = -1$.

Задача 1. Построить точку D четвертую гармоническую данным точкам A, B, C.

■ Построим четырехвершинник с вершинами в точках A, B и диагональной точкой C. Через точку A проводим произвольные прямые 1 и 2, а через точку C произвольную прямую 3. Через точку B и точки пересечения прямых 1 и 3, 2 и 3 проводим прямые



4 и 5. Наконец, через точки пересечения прямых 4,2 и 1,5 проводим прямую 6, которая пересекает прямую (AC) в точке D. По теореме 11.7 получаем, что $(AB, CD) = -1$. ■

Задача 2. На расширенной аффинной прямой даны четыре точки A, B, D и C_∞ такие, что $(AB, C_\infty D) = -1$. Доказать, что D - середина отрезка AB.

■ Рассмотрим систему координат $R = (A, C_\infty, B)$. Если $D(u_0 : u_1)$, то $(AC_\infty; BD) = \frac{u_0}{u_1}$. По свойству сложного отношения $(AC_\infty; BD) = 1 - (AB; C_\infty D) = 2$. Отсюда получим, что $\frac{u_0}{u_1} = 2$ или $D(2:1)$. Перейдем к аффинным координатам на прямой: $x_A = \frac{0}{1} = 0$, $x_B = \frac{1}{1} = 1$, $x_D = \frac{1}{2}$. Таким образом, точка D есть середина отрезка AB. ■

Задача 3. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Пользуясь линейкой поделить данный отрезок пополам.

■ Пусть C_∞ - бесконечно удаленная точка этих прямых. Для решения задачи достаточно построить точку D - четвертую гармоническую к концам отрезка A, B и к точке C_∞. По задаче 2 точка D есть середина отрезка AB. ■

10.17 Кривые второго порядка на проективной плоскости

Пусть E^2 - проективная плоскость.

Кривой второго порядка на проективной плоскости E^2 называется множество точек, заданное в некоторой проективной системе координат R уравнением вида

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} не обращаются в ноль одновременно.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0 \text{ при условии, что } a_{ij} = a_{ji}. \quad (2)$$

Ранг матрицы

$$C = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов уравнения (2), называется рангом кривой второго порядка.

Слева в уравнении (1) стоит квадратичная форма от переменных x_0, x_1, x_2. Существует замена координат (§9.8) вида

$$\overline{x}_i = \sum_{j=0}^{2} c_{ji} x_j, \quad i = 0, 1, 2 \ \ u \ \ det(c_{ji}) \neq 0, \tag{3}$$

которая приводит уравнение кривой (1) к одному из следующих уравнений (черта - опущена):

$$I\ (x_0)^2 + (x_1)^2 - (x_2)^2 = 0, \quad II\ (x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 = 0,$$

$$III\ (x_0)^2 + (x_1)^2 = 0, \quad IV\ (x_0)^2 - (x_1)^2 = 0, \quad V\ (x_0)^2 = 0.$$

Две кривые проективной плоскости называются **проективно эквивалентными**, если существует проективное преобразование плоскости при котором одна из кривых является образом другой.

Формулы (3) задают некоторое проективное преобразование плоскости в системе координат R. При этом образом кривой L, заданной уравнением (1), является одна из 5 кривых, заданных уравнениями I-V в той же системе координат R. Следовательно, данная кривая L проективно эквивалентна одной из пяти кривых I-V.

Из курса алгебры (раздел "Квадратичные формы") известно, что проективно эквивалентные кривые имеют одинаковые ранги. Так как кривые, заданные уравнениями вида I-V, различаются рангами и наличием на кривых действительных точек, то произвольная кривая L может быть проективно эквивалентна только одной кривой, заданной уравнением вида I-V.

Все кривые плоскости, проективно эквивалентные кривой, заданной уравнением I, называются **овальными** кривыми. Ранг овальной кривой равен 3. Кривые, проективно эквивалентные кривым II, III, мнимые кривые. У таких кривых нет действительных точек. Кривые, проективно эквивалентные кривым III, IV и V, называются соответственно парой различных мнимых прямых, парой различных действительных прямых, парой совпадающих действительных прямых.

Примеры овальных кривых на расширенной аффинной плоскости.

1). Запишем уравнение параболы $L : y^2 = 2px$ в однородных координатах: $(\frac{x_2}{x_0})^2 = 2p\frac{x_1}{x_0}$, $x_0 \neq 0$. Домножим части этого уравнения на x_0^2: $x_2^2 = 2px_1x_0$. Решение этого уравнения есть координаты всех точек параболы L и координаты несобственной точки $A(0 : 1 : 0)$. Пусть $L' = L \cup A$. Кривая L' является овальной кривой расширенной аффинной плоскости, так как кривая L' содержит действительные точки и ее ранг равен 3.

2). Запишем уравнение гиперболы $L : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в однородных координатах: $\frac{1}{a^2}(\frac{x_1}{x_0})^2 - \frac{1}{b^2}(\frac{x_2}{x_0})^2 = 1$. Домножим части этого уравнения на x_0^2: $\frac{1}{a^2}(x_1)^2 - \frac{1}{b^2}(x_2)^2 - (x_0)^2 = 0$. Решением такого уравнения есть координаты всех точек гиперболы L и двух несобственных точек $A(0 : a : b)$ и $B(0 : -a : b)$. Кривая $L' = L \cup \{A, B\}$ имеет действительные точки и ее ранг равен 3, следовательно L' - овальная кривая.

3). Аналогично можно показать, что эллипс также является овальной кривой.

Таким образом, эллипс, гипербола и парабола, добавленные несобственными точками, являются овальными кривыми на расширенной аффинной плоскости; такие кривые проективно эквивалентны друг другу.

10.18 Касательная к кривой второго порядка

Пусть E^2 - проективная плоскость.

Касательной к овальной кривой $L \subset E^2$ в точке $M \in L$ называется прямая, пересекающая кривую L только по точке M.

Теорема 10.8 *Пусть овальная кривая L задана уравнением*

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_i x_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{1}$$

Уравнение касательной к кривой L в точке $M_0(a_0 : a_1 : a_2) \in L$ имеет следующий вид:

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}a_i x_j = 0 \tag{2}$$

или в развернутом виде

$$x_0(a_{00}a_0 + a_{10}a_1 + a_{20}a_2) + x_1(a_{01}a_0 + a_{11}a_1 + a_{21}a_2) + x_2(a_{02}a_0 + a_{12}a_1 + a_{22}a_2) = 0.$$

■ Отметим, что уравнение (2) есть уравнение прямой для произвольной точки плоскости $M_0(a_0 : a_1 : a_2)$, то есть, не все коэффициенты в этом уравнении равны нулю. Действительно, если бы

$$\sum_{i=0}^{2} a_{ij}a_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \tag{3}$$

то эти уравнения образовывали бы однородную систему относительно a_0, a_1, a_2. Так как кривая овальная, то определитель матрицы этой системы не равен нулю и система (3) имеет лишь нулевые решения $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Но, это невозможно для проективных координат точки. Таким образом, уравнение (2) есть уравнение прямой, обозначим ее l. Ясно, что на этой прямой лежит и точка $M_0(a_0 : a_1 : a_2)$ - координаты этой точки удовлетворяю (2), так как они удовлетворяют уравнению (1).

Покажем, что точки прямой l, отличные от точки M_0, не принадлежит кривой L. Предположим противное, нашлась точка $M(b_0 : b_1 : b_2) \in l$, не совпадающая с M_0 и принадлежащая L. Напишем параметрические уравнения прямой l: $x_i = \alpha a_i + \beta b_i$, $i = 0, 1, 2$ и будем искать координаты точек пересечения $L \cap l$. Для этого подставим x_i в уравнение кривой (1). Получим уравнение относительно параметров α, β соответствующих точке пересечения $L \cap l$:

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(\alpha a_i + \beta b_i)(\alpha a_j + \beta b_j) = 0$$

или

$$\alpha^2 \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}a_i a_j + 2\alpha\beta \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}a_i b_j + \beta^2 \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}b_i b_j = 0. \tag{4}$$

Первая и третья суммы в (4) равна нулю, так как точки M_0 и M принадлежит кривой (1), вторая сумма равна нулю, так как точка M лежит на прямой (2). Следовательно уравнение (4) имеет бесконечно много решений, что означает, что все точки прямой (2) лежат на кривой (1). Но, овальная кривая не содержит прямых (подробнее см. в замечании ниже). Противоречие доказывает, что только точка M_0 есть точка пересечения прямой (2) и кривой (1), то есть кривая (1) - касательная к кривой в точке M_0. ■

Замечание. Покажем, что произвольная прямая l пересекает овальную кривую L не более чем в двух точках.

■ Так как L овальная кривая, то некоторым проективным преобразованием ее можно перевести в кривую L', заданную уравнением $(x_0)^2+(x_1)^2-(x_2)^2=0$. При этом, прямая l преобразуется в некоторую прямую l'. Так как проективное преобразование биективно, то множества $L \cap l$ и $L' \cap l'$ - биективны. Исследуем $L' \cap l'$. Для этого запишем параметрическое уравнение прямой по двум различным точкам $M_0(a_0 : a_1 : a_2)$, $M(b_0 : b_1 : b_2)$ и составим уравнение (4). Так как $a_{00} = a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$, остальные коэффициенты раны нулю, то (4) примет вид

$$\alpha^2(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2) + 2\alpha\beta(a_0b_0 + a_1b_1 - a_2b_2) + \beta^2(b_0^2 + b_1^2 - b_2^2) = 0. \qquad (5)$$

Предположим, что в этом уравнении все коэффициенты равны нулю:

$$\begin{cases} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 = 0, \\ a_0b_0 + a_1b_1 - a_2b_2 = 0, \\ b_0^2 + b_1^2 - b_2^2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, в противном случае точка проективной плоскости имела бы нулевые координаты. Поэтому систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} (\frac{a_0}{a_2})^2 + (\frac{a_1}{a_2})^2 = 1, \\ \frac{a_0}{a_2}\frac{b_0}{b_2} + \frac{a_1}{a_2}\frac{b_1}{b_2} = 1, \\ (\frac{b_0}{b_2})^2 + (\frac{b_1}{b_2})^2 = 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Сложим первое и третье равенства и вычтем из суммы удвоенное второе, получим $(\frac{a_0}{a_2} - \frac{b_0}{b_2})^2 + (\frac{a_1}{a_2} - \frac{b_1}{b_2})^2 = 0$. Следовательно, $\frac{a_0}{a_2} = \frac{b_0}{b_2}$ и $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. Отсюда получаем, что $M_0(a_0 : a_1 : a_2) = M_0(\frac{a_0}{a_2} : \frac{a_1}{a_2} : 1) = M_0(\frac{b_0}{b_2} : \frac{b_1}{b_2} : 1) = M(b_0 : b_1 : b_2)$. Противоречит выбору точек: $M \neq M_0$. Поэтому коэффициенты в уравнении (5) не все равны нулю и уравнение (5), как квадратное уравнение, имеет не более двух решений. Следовательно, множество $L' \cap l'$, а, значит, и $L \cap l$ состоит не более, чем из двух точек. ■

Задача 1. Написать уравнение касательной к кривой $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ в точке $M(1:0:1)$.

Задача 2. Точка M называется внутренней точкой овальной кривой L, если **любая** прямая, проходящая через точку M, пересекает кривую L в двух различных точках. Показать, что множество всех внутренних точек можно задать неравенством вида

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j < 0.$$

10.19 Полюс и поляра

Пусть E^2 - проективная плоскость, R - проективная система координат. Овальная кривая L

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0, \;\; a_{ij} = a_{ji}, \tag{1}$$

позволяет установить некоторое соответствие между точками и прямыми проективной плоскости.

Пусть точка $M_0(x_{00} : x_{01} : x_{02})$ не принадлежит кривой L. Проведем через точку M_0 прямую, которая пересечет кривую L в двух различных точках: $M_1(x_{10} : x_{11} : x_{12})$ и $M_2(x_{20} : x_{21} : x_{22})$. Пусть точка $M(x_0 : x_1 : x_2)$ такая, что $(M_1M_2; M_0M) = -1$.

Покажем, что множество всех таких точек M лежит на одной и той же прямой l. Эта прямая l называется **полярой** точки M_0 относительно кривой L. Точка M_0, при этом, называется **полюсом** прямой l относительно кривой L. Другими словами, полюс прямой l - это точка, поляра которой есть прямая l.

■ Рассмотрим параметрические уравнения прямой (M_0M) и выразим координаты точек M_1 и M_2 через координаты точек M_0 и M :

$$\begin{aligned} x_{1i} &= \alpha x_i + \beta x_{0i}, \\ x_{2i} &= \gamma x_i + \delta x_{0i}, \end{aligned}$$

$i = 0, 1, 2$. Так как $M_0 \notin L$, то $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Координаты точек проективного пространства определяются с точностью до ненулевого множителя, поэтому можно считать, что $x_{1i} = x_i + \lambda x_{0i}$, $x_{2i} = x_i + \mu x_{0i}$, $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $\mu = \frac{\delta}{\gamma}$, также координаты точек M_1 и M_2.

Найдем теперь сложное отношение четырех точек $(M_1M_2; M_0M)$. Воспользуемся леммой 11.12, например, при $i = 0$, $j = 1$:

$$(M_1M_2; M_0M) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 + \lambda x_{00} & x_1 + \lambda x_{01} \\ x_{00} & x_{01} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 + \mu x_{00} & x_1 + \mu x_{01} \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 + \lambda x_{00} & x_1 + \lambda x_{01} \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 + \mu x_{00} & x_1 + \mu x_{01} \\ x_{00} & x_{01} \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{\mu \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_{00} & x_{01} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix}}{\lambda \begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_{00} & x_{01} \end{vmatrix}} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Так как $(M_1M_2; M_0M) = -1$, то $\frac{\mu}{\lambda} = -1$ или $\mu = -\lambda$. Поэтому $x_{1i} = x_i + \lambda x_{0i}$, $x_{2i} = x_i - \lambda x_{0i}$. Так как точки M_1, M_2 принадлежат кривой L, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению (1):

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(x_i + \lambda x_{0i})(x_j + \lambda x_{0j}) = 0$$

и

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(x_i - \lambda x_{0i})(x_j - \lambda x_{0j}) = 0.$$

Вычитая, теперь, правые и левые части этих равенств, получим, что координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ точки M поляры удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_{0j} x_i = 0$$

или

$$x_0(a_{00}x_{00} + a_{01}x_{01} + a_{02}x_{02}) + x_1(a_{10}x_{00} + a_{11}x_{01} + a_{12}x_{02}) + \\ x_2(a_{20}x_{00} + a_{21}x_{01} + a_{22}x_{02}) = 0. \qquad (2)$$

Так как кривая L овальная, то уравнение (2) есть уравнение прямой. Это и есть поляра точки M_0. ■

Полярой точки M, принадлежащей кривой L, называется касательная к кривой L в точке M.

Если точка $M \in L$, то уравнение (2) совпадает с уравнение касательной. Поэтому уравнение (2) есть уравнение поляры любой точки плоскости без исключения.

Замечание. Если функция $f(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j$, то уравнение поляры точки $M_0(x_{00} : x_{01} : x_{02})$ можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_{00}, x_{01}, x_{02})x_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{00}, x_{01}, x_{02})x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{00}, x_{01}, x_{02})x_2 = 0.$$

Теорема 10.9 *Если поляра точки M_1 проходит через точку M_2, то поляра точки M_2 проходит через точку M_1.*

■ Запишем поляру точки $M_1(x_{10} : x_{11} : x_{12}) : \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_{1j} x_i = 0$. Пусть $M_2(x_{20} : x_{21} : x_{22})$. Так как $M_2 \in L$, то

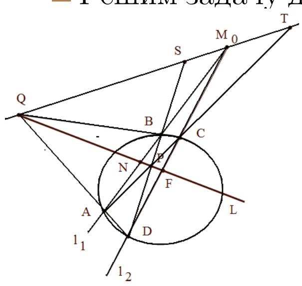
$$\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_{1i} x_{2j} = 0. \qquad (3)$$

Поляра точки $M_2(x_{20} : x_{21} : x_{22}) : \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_{2j} x_i = 0$. Проверим, лежит ли точка M_1 на этой поляре, подставим координаты точки $M_1(x_{10} : x_{11} : x_{12})$ в уравнение поляры точки M_2, получим в точности равенство (3). ■

Следующие три задачи на построение решаются одной линейкой.

Задача 1. На расширенной аффинной плоскости дана овальная кривая L. Построить поляру l данной точки M_0.

■ Решим задачу для окружности. **Построение.** Пусть две произвольные секущие l_1, l_2 окружности, проходящие через точку M_0, пересекают данную окружность в точках $\{A, B\} = l_1 \cap L$ и $\{C, D\} = l_2 \cap L$. Тогда точка $P = (AC) \cap (BD)$ и $Q = (AD) \cap (BC)$ принадлежат поляре точки M_0, а прямая (PQ) есть искомая поляра.



Доказательство. Рассмотрим четырехвершинник $ABCD$. Пусть S, T - точки пересечения диагонали (QT) со сторонами, проходящими через третью диагональную точку. Как уже отмечали в следствии из теоремы 11.7, $(AC, PT) = -1$. Спроектируем прямую (AC) на прямую (AB) из точки Q. При этом $A \to A$, $P \to N$, $C \to B$, $T \to M_0$. Поэтому $(AB, NM_0) = -1$ и точка N принадлежит поляре точки M_0. Аналогично можно доказать, что $(DC, FM_0) = -1$ и точка F принадлежит поляре точке M_0. Следовательно $(PQ) = (NF)$ - поляра точки M_0. ■

Задача 2. На расширенной аффинной плоскости построить полюс данной прямой l относительно данной овальная кривая L.

■ **Построение.** Пусть A, B произвольные точки l. Построим поляры l_A и l_B точек A, B соответственно. Тогда $M = l_A \cap l_B$ искомый полюс. Действительно, пусть l_M - поляра точки M. Применяем теорему 11.9. Так как $M \in l_A$, то $A \in l_M$, а из того, что $M \in l_B$ следует, что $B \in l_M$. Отсюда получаем, что $l_M = (AB)$. ■

Задача 3. Построить касательную к данной кривой L, проходящую через данную точку M.

■ Касательная есть поляра l_B точки касания B. Считаем, что $M \notin L$. По теореме 11.9, если $M \in l_B$, то точка B принадлежит поляре l_M точки M. Поэтому, строим поляру l_M точки M, тогда $B \in l_M \cap L$, а (BM) - искомая касательная. Если $l_M \cap L = \emptyset$, то касательной не существует.

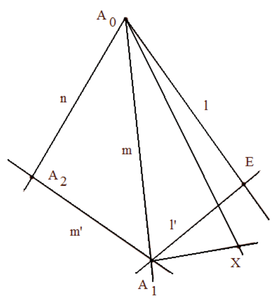
Пусть $M \in L$. Проведем через M произвольную секущую l и построим ее полюс A. Тогда (AM) - касательная к L. ■

10.20 Теорема Штейнера

Следующие две теоремы описывает соотношение между пучками проективной плоскости и овальными кривыми.

Теорема 10.10 *Пусть отображение пучков $f : p(A_0) \to p(A_1)$ является проективным, но не перспективным. Тогда множество точек пересечения всех соответствующих прямых этих пучков есть овальная кривая, проходящая через центры пучков A_0, A_1.*

■ 1). Пусть $n = f^{-1}(m)$, где прямая $m = (A_0A_1) \in p(A_1)$. Проективное отображение f можно задать парой соответствующих систем координат $R_0 = (n, m, l)$ и $R_1 = (m, m', l')$, где $l' = f(l)$, $m' = f(m)$; $l, m \in p(A_0)$. Обозначим через $A_2 = m' \cap n$, $E = l \cap l'$. Тогда $R = (A_0, A_1, A_2, E)$ - проективная система координат на плоскости E^2 (никакие три точки не лежат на одной прямой). Действительно, если бы точки A_2, A_0, A_1 лежали бы на одной прямой, то это была бы прямая m, тогда $m' = m$ и по лемме 11.9 отображение пучков f было бы перспективным. По этой же причине, точки E, A_0, A_1 не лежат на одной прямой. Точки A_2, A_1, E (A_2, A_0, E) не лежат на одной прямой так как $m' \neq l'$ ($n \neq l$) в силу выбора базисных прямых системы координат R_1 (R_2).



2). Пусть множество $\gamma = \{l \cap f(l) | l \in p(A_0)\}$. Напишем уравнение множества γ в системе координат R. Пусть $X(x_0 : x_1 : x_2)$ произвольная точка γ, не лежащая на осях координат R. Тогда $f((A_0X)) = (A_1X)$. Так как f проективное отображение, то оно сохраняет сложное отношение четырех точек, поэтому

$$(nm; l(A_0X)) = (mm'; l'(A_1X)). \tag{1}$$

Вычислим части этого равенства. Перспективное отображение $p(A_0) \to (A_1A_2)$ проективно, поэтому левая часть (1) *л.ч.* $= (nm; l(A_0X)) = (A_2A_1; E_0X_0)$, где $E_0 = l \cap (A_1A_2)$, $X_0 = (A_0X) \cap (A_1A_2)$. Аналогично, рассматривая перспективное отображение $p(A_1) \to (A_0A_2)$, получаем, что правая часть (1) *п.ч.* $= (mm'; l'(A_1X)) = (A_0A_2; E_1X_1)$, где $E_1 = l' \cap (A_0A_2)$, $X_1 = (A_1X) \cap (A_0A_2)$.

По лемме 11.4 точка $X_0(x_1 : x_2)$ в системе координат $R' = (A_1, A_2, E_0)$, точка $X_1(x_0 : x_2)$ в системе координат $R'' = (A_0, A_2, E_1)$. Поэтому по свойству сложного отношения получаем, что *п.ч.* $= \frac{x_0}{x_2}$, *л.ч.* $= (A_1A_2; E_0X_0)^{-1} = \frac{x_2}{x_1}$. Приравниваем найденные части равенства, получим: $\frac{x_0}{x_2} = \frac{x_2}{x_1}$ или

$$(x_2)^2 - x_0x_1 = 0. \tag{2}$$

Если точка $X \in \gamma$ и лежит на осях координат, то это может быть одна из точек A_1, A_0, E. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению (2). Кривая γ, заданная уравнением (2), имеет ранг равный 3, поэтому γ - овальная кривая, проходящая через точки A_0, A_1. ■

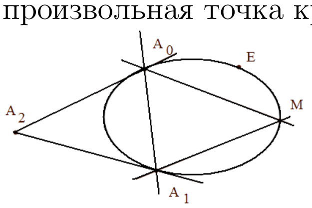
Следствие. Прямые $f((A_0A_1))$ и $f^{-1}((A_0A_1))$ являются касательными к кривой γ.

■ Напишем уравнение касательной к кривой γ в точке $A_0(1 : 0 : 0)$. Пусть $\varphi(x_0, x_1, x_2) = (x_2)^2 - x_0x_1$. Так как $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(A_0) = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(A_0) = -1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(A_0) = 0$, то уравнение касательной (или поляры) в точке A_0 имеет вид $x_1 = 0$. С другой стороны, $x_1 = 0$ есть уравнение координатной прямой $(A_0A_2) = n$, следовательно $n = f^{-1}((A_0A_1))$ - касательная.

Аналогично доказывается что прямая $f((A_0A_1))$ есть касательная в точке $A_1(0 : 1 : 0)$. ■

Теорема 10.11 *Пусть γ - овальная кривая, точки A_0, A_1 - произвольные различные точки кривой γ. Определим отображение пучков $f : p(A_0) \to p(A_1)$ правилом: $f((A_0M)) = (A_1M)$, $M \in \gamma$, касательной к кривой γ в точке A_0 поставим в соответствие прямую $(A_0A_1) \in p(A_1)$, прямой $(A_0A_1) \in p(A_0)$ поставим в соответствие касательную к кривой γ в точке A_1. Тогда f является проективным, но не перспективным отображением пучков.*

■ Пусть A_2 есть точка пересечения касательных к кривой γ в точках A_0 и A_1, E - произвольная точка кривой γ отличная от точек A_0, A_1. Так как касательная пересекает кривую γ только в точке касания, то точки A_0, A_1, A_2, E образуют проективную систему координат плоскости, обозначим ее через R. Пусть $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0$ есть уравнение кривой γ в системе координат R. Так как $A_0, A_1 \in \gamma$, то, подставляя координаты точек A_0, A_1 в уравнение γ, получим,



что $a_{00} = 0$, $a_{11} = 0$. Следовательно уравнение γ примет вид $a_{22}(x_2)^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$. Напишем уравнение касательной к γ в точке $A_0(1 : 0 : 0)$: $2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 = 0$. С другой стороны, касательная к γ в точке A_0 есть координатная прямая $(A_0A_2) : x_1 = 0$. Сравнивая уравнения, получим, что $a_{02} = 0$. Аналогично, рассматривая уравнения касательной к кривой в точке A_1, получим, что $a_{12} = 0$. Таким образом, уравнение кривой γ примет вид $a_{22}(x_2)^2 + 2a_{01}x_0x_1 = 0$. Наконец, учитывая, что $E(1 : 1 : 1) \in \gamma$, получим $a_{22} + 2a_{01} = 0$. Отсюда окончательно получаем, что уравнение γ имеет вид $(x_2)^2 - x_0x_1 = 0$. Это уравнение совпадает с уравнением (2) из доказательства теоремы 11.10. Рассмотрим теперь проективное отображение f' пучков $p(A_0)$ и $p(A_1)$, заданное парой систем координат $((A_0A_1), (A_0A_2), (A_0E))$ и $((A_1A_2), (A_1A_0), (A_1E))$. Отображение f' не перспективное отображение. По теореме 11.10 соответствующие прямые пучков в отображении f' пересекаются на овальной кривой γ', которая в той же системе координат R задается уравнением (2). Множество γ задано тем же уравнением. Следовательно, $\gamma = \gamma'$ и $f = f'$. ■

Приложение теоремы Штейнера к задачам на построение основывается на следующих теоремах:

Теорема 10.12 *Даны пять точек общего положения. Существует единственная овальная кривая, проходящая через эти точки.*

Теорема 10.13 *Даны четыре точки общего положения A_0, A_1, B, C и прямая l, проходящая только через одну из них. Существует единственная овальная кривая, проходящая через эти точки, для которой данная прямая является касательной.*

Докажем теорему 11.13, теорема 11.12 доказывается аналогично.

■ Будем считать, что прямая l проходит через точку A_0. Рассмотрим системы координат: $R_1 = (l, (A_0B), (A_0C))$ на $p(A_0)$ и $R_2 = ((A_1A_0), (A_1B), (A_1C))$ на $p(A_1)$. Проективное отображение $f : p(A_0) \to p(A_1)$, определенное системами координат R_1 и R_2, не является перспективным. По теореме 11.10 соответствующие прямые в отображении f пересекаются на овальной кривой, которую обозначим γ. Из следствия теоремы 11.10 прямая l является касательной к γ, так как $l = f^{-1}((A_1A_0))$. Существование кривой доказано.

Докажем единственность кривой γ. Допустим, что есть еще одна такая кривая γ'. По теореме 11.11 кривая γ' порождает проективное, но не перспективное отображение $f' : p(A_0) \to p(A_1)$. Видно, что отображение f' можно задать парой систем координат R_1 и R_2. Следовательно $f = f'$ и $\gamma = \gamma'$. ■

Задача. На расширенной аффинной плоскости даны пять точек общего положения A_0, A_1, A, B, C и прямая l, проходящая только через одну из них. Пусть γ - овальная кривая, проходящая через эти точки. Построить точку $M = l \cap \gamma$.

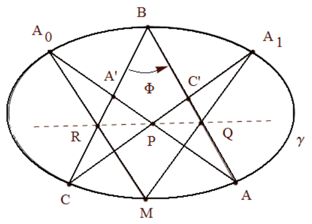
■ По теореме 11.11 кривая γ порождает проективное, но не перспективное отображение пучков $f : p(A_0) \to p(A_1)$, при котором соответствующие прямые пересекаются на кривой. Можно считать, что f задано системами координат $R_1 = ((A_0A), (A_0B), (A_0C))$ и $R_2 = ((A_1A), (A_1B), (A_1C))$. Применяя задачу 3 §11.14, строим прямую $f(l)$. Тогда $M = l \cap f(l)$. ■

10.21 Теорема Паскаля

Шестивершинником на проективной плоскости называется упорядоченное множество, состоящее из шести точек общего положения (никакие три из них не лежат на одной прямой). Обозначение шестивершинника: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Считаем, что порядок на этом множестве определяется записью этих точек: A_1 - первая точка, A_2 - вторая и так далее. Точки называются вершинами шестивершинника. Прямые A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, ...,$ A_6A_1 называются сторонами шестивершинника. Стороны A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 называются противоположными сторонами шестивершинника.

Теорема 10.14 *Точки пересечения противоположных сторон вписанного в овальную кривую шестивершинника лежат на одной прямой.*

■ Пусть шестивершинник A_0ABCA_1M вписан в овальную кривую γ. Покажем, что точки $P = (A_0A) \cap (CA_1)$, $Q = (AB) \cap (A_1M)$ и $R = (BC) \cap (MA_0)$ лежат на одной прямой. Кривая γ порождает проективное, но не перспективное отображение пучков



$f : p(A_0) \to p(A_1)$ (теорема 11.11). Отображение f порождает проективное отображение $\varphi : (BC) \to (BA)$ следующим образом: $\varphi(X) = Y \iff (A_0X) \cap (A_1Y) \in \gamma$ или $f((A_0X)) = (A_1Y)$. Так как $\varphi(B) = B$, то φ - перспективное отображение прямых $(BC) \to (BA)$. Центр перспективы точка $(A'A) \cap (CC') = (A_0A) \cap (CA_1) = P$. Так как $\varphi(R) = Q$, то точки Q, R, P лежат на одной прямой. ■

Теорема 10.15 *Точки пересечения противоположных сторон шестивершинника лежат на одной прямой. Тогда шестивершинник вписан в овальную кривую второго порядка.*

■ Пусть A_0ABCA_1M - шестивершинник у которого точки $P = (A_0A) \cap (CA_1)$, $Q = (AB) \cap (A_1M)$ и $R = (BC) \cap (MA_0)$ лежат на одной прямой. Возьмем первые пять точек шестивершинника A_0, A, B, C, A_1. По теореме 11.12 существует овальная кривая γ, проходящая через эти точки. Покажем, что точка $M \in \gamma$. Кривая γ порождает проективное отображение пучков $f : p(A_0) \to p(A_1)$ (теорема 11.11). Отображение f порождает проективное и перспективное отображение $\varphi : (BC) \to (BA)$ следующим образом: $\varphi(X) = Y \iff (A_0X) \cap (A_1Y) \in \gamma$. При этом точка P - центр перспективы φ. Так как Q, R, P лежат на одной прямой, то $\varphi(R) = Q$. Тогда по определению φ $(A_0R) \cap (A_1Q) \cap \gamma$. Но $(A_0R) \cap (A_1Q) = M$, поэтому $M \in \gamma$. ■

Задача. На расширенной аффинной плоскости даны пять точек общего положения A, B, C, D, E и прямая l, проходящая только через точку A. Пусть γ - овальная кривая, проходящая через эти точки. Построить точку $M \in l \cap \gamma$, $M \neq A$, применяя теорему Паскаля.

■ Шестивершинник $ABCDEM$ вписан в кривую γ. По теореме Паскаля точки $P = (AB) \cap (DE)$, $Q = (BC) \cap (EM)$ и $R = (CD) \cap (MA) = (CD) \cap l$ лежат на одной прямой. Строим точку $Q = (RP) \cap (BC)$. Тогда $M = l \cap (EQ)$. ■

10.22 Аффинная и проективная геометрии

Аффинные отображения. Пусть R_i - аффинная система координат на аффинной плоскости E_i, $i = 1, 2$ (§10.2).

Отображение $f : E_1 \to E_2$ называется аффинным, если отображение f ставит в соответствие точки с одинаковыми координатами в системах координат R_1 и R_2.

Если плоскости совпадают $E_1 = E_2$, то аффинное отображение f является аффинным преобразованием плоскости (§5.2).

Свойства аффинного отображения плоскостей:

Образ прямой при аффинном отображении есть прямая. Аффинное отображение сохраняет простое отношение трех точек, переводит отрезок в отрезок, луч в луч. Композиция аффинных отображений является аффинным отображением, обратное отображение к аффинному отображению есть аффинное отображение. Из этих свойств, в частности, следует, что если $R = (A, B, C)$ - аффинная система координат, A', B', C' образы точек A, B, C при некотором аффинном отображении, то $R' = (A', B', C')$ - аффинная система координат. Системы координат R и R' называются соответствующими относительно данного отображения. Аффинное отображение можно задать любой парой соответствующих систем координат.

Доказательство этих свойств аналогично доказательству таких свойств для аффинных преобразований.

Теорема 10.16 *Пусть E - аффинная плоскость с пространством переносов V. Пусть $\varphi : E \to E'$ - биекция. Тогда E' - аффинная плоскость с пространством переносов V, а φ - аффинное отображение.*

■ Пусть $A', B' \in E'$ - произвольные точки, $A, B \in E$ - их прообразы относительно φ. Обозначим через $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, то есть определим отображение - паре точек $A', B' \in E'$ поставим в соответствие вектор $\overline{AB}$ из V. Это отображение удовлетворяет аксиомам аффинного пространства (§10.2). Действительно, пусть $A' \in E'$ - произвольная точка, $\overline{a} \in V$ - произвольный вектор. Пусть $A = \varphi^{-1}(A')$. Так как E - аффинная плоскость, то существует единственная точка B такая, что $\overline{AB} = \overline{a}$. Отсюда $\overline{A'B'} = \overline{a}$, где B' - образ B. Пусть $A', B', C' \in E'$, $A, B, C \in E$ - их прообразы относительно φ. Так как $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, то и $\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$ и вторая аксиома выполняется.

Отображение φ является аффинным отображением. Рассмотрим две системы координат $R = (O, \overline{e}_1, ..., \overline{e}_n)$ и $R' = (O', \overline{e}_1, ..., \overline{e}_n)$, где $O' = \varphi(O)$. Если $M' = \varphi(M)$, то из равенства $\overline{OM'} = \overline{OM}$ следует, что точки M и M' имеют одинаковые координаты в системах координат R и R' соответственно. ■

Пусть (E, V, π) проективная плоскость, $l \subset E$ - прямая. Пусть (E', V', π') расширенная аффинная плоскость, $l' \subset E'$ - бесконечно удаленная прямая. Пусть подпространство $W \subset V$ - порождает l, а подпространство $W' \subset V'$ - порождает l'. Пусть $\psi : V' \to V$ - изоморфизм векторных пространств такой, что $\psi(W') = W$. По теореме 11.3 отображение $f : E' \to E$ такое, что $f \circ \pi' = \pi \circ \psi$ есть проективное отображение. При этом $f(l') = l$. Обозначим через $\varphi = f|_{E' \setminus l'} : E' \setminus l' \to E \setminus l$. Расширенная аффинная плоскость без бесконечно удаленной прямой $E' \setminus l'$ есть аффинная плоскость. Так как φ - биекция, то по теореме 11.16 множество $E \setminus l$ есть аффинная плоскость. Таким образом, доказана

Теорема 10.17 *Проективная плоскость с вырезанной прямой является аффинной плоскостью.*

Прямую l для аффинной плоскости $E_a = E \setminus l$ называют также несобственной прямой, а ее точки - несобственными точками аффинной плоскости E_a. Прямые аффинной плоскости E_a есть проективные прямые с удаленной своей несобственной точкой.

Пусть $R = (O, A, B)$ - аффинная система координат на аффинной плоскости E_a, $R_1 = (O, A_1, B_1, C)$ - проективная система координат на E, где точки A_1, B_1 есть несобственные точки аффинных прямых (OA) и (OB) соответственно. Аффинные координаты (x_a, y_a) точки $M \in E_a$ и ее проективные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ связаны равенствами

$$x_a = \frac{x_1}{x_0}, \quad y_a = \frac{x_2}{x_0}. \tag{1}$$

■ Действительно, пусть R' и R'_1 - системы координат на расширенной аффинной плоскости (E', V', π') соответствующие в отображениях φ и f системам координат R и R_1. Так как φ и f сохраняют координаты точек, то у точки M и ее прообраза M' одинаковые аффинные и проективные координаты. Из §11.8 находим, что $x_a = \frac{x_1}{x_0}$, $y_a = \frac{x_2}{x_0}$. ■

Теорема 10.18 *Пусть E - проективная плоскость, $E_a \subset E$ - аффинная плоскость с несобственной прямой l, g проективное преобразование проективной плоскости E такое, что $g(l) = l$. Тогда сужение преобразования g на E_a есть аффинное преобразование аффинной плоскости E_a.*

■ Доказательство теоремы вытекает из формул (1). ■

Из теоремы 11.18 следует, что аффинная группа преобразований плоскости есть подгруппа группы проективных преобразований проективной плоскости. Следуя определению геометрии по Клейну, можно сказать, что аффинная геометрия есть часть проективной геометрии. В §20.4 мы увидим, что и неевклидова геометрия Лобачевского есть часть проективной геометрии.

11 Геометрические построения на плоскости

В этой главе рассматриваются основные приемы решения задач на построение с помощью **циркуля и линейки** и исследуется разрешимость задач на построение, основы начертательной геометрии. Считаем, что все данные задачи на построение должны быть нарисованы на чертеже в самом общем виде, если о взаимном расположении данных задачи ничего не сказано в условии. Так, если дан треугольник, то надо нарисовать непрямоугольный треугольник с разными длинами сторон.

11.1 Элементарные построения

Каждая задача на построение решается с помощью некоторой последовательности элементарных задач на построение. Пусть $\omega(A, r)$ - окружность с центром в точке A и радиуса r.

1). *Построить середину C данного отрезка AB.*

■ Пусть $r > \frac{1}{2}AB$. Строим множество $\{M, N\} = \omega(A, r) \cap \omega(B, r)$. Тогда середина $C = (MN) \cap (AB)$. ■

2). *Построить биссектрису OC данного угла $\angle AOB$.*

■ Строим точки M, N пересечения окружности $\omega(O, r)$ с лучами угла, $r > 0$. Пусть точка $C \in \omega(M, r) \cap \omega(N, r)$ и не совпадает с O. Тогда $[OC)$ - биссектриса. ■

3). *Через данную точку A провести прямую, перпендикулярную данной прямой l.*

■ Проведем окружность $\omega(A, r)$, где радиус $r > \rho(A, l)$. Пусть точки $\{M, N\} = \omega(A, r) \cap l$ и точка $P \in \omega(M, r) \cap \omega(N, r)$ и не совпадает с точкой A. Тогда AP - перпендикуляр к l, проходящий через точку A. ■

4). *Через данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой l.*

■ Пусть точка $M \in l$, $N \in \omega(M, MA) \cap l$, а точка $P \in \omega(A, MA) \cap \omega(N, MA)$ не совпадает с M. Так как $AMNP$ - ромб, то прямая (AP) параллельна l. ■

5). *Построить треугольник по трем данным сторонам a, b, c.*

■ На произвольной прямой l отложим отрезок $AB = c$. Пусть $C \in \omega(A, a) \cap \omega(B, b)$. Такая точка C существует, если $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$. ABC - искомый треугольник. ■

6). *От данного луча $[O_1B_1)$ отложить угол, равный данному $\angle(AOB)$.*

■ Строим треугольник $O_1A_1B_1$, равный треугольнику OAB. Тогда угол $\angle(A_1O_1B_1)$ - искомый. ■

7). *Построить треугольник по углу и двум прилежащим сторонам, по стороне и двум прилежащим углам.*

■ Воспользоваться задачей 6. ■

8). *Построить касательную l к окружности $\omega(O,r)$, проходящую через данную точку A.*

■ Строим окружности $\omega(A,OA)$, $\omega(O,2r)$, точки $K \in \omega(A,OA) \cap \omega(O,2r)$ и $P \in OK \cap \omega(O,r)$. Тогда прямая (AP) - касательная. Действительно, треугольник OAK - равнобедренный ($OA = KA$), и AP - медиана, так как $OP = PK = r$. Поэтому AP - высота треугольника, а угол $\angle OPA = 90^\circ$. Прямая (AP), проходящая через точку P окружности, перпендикулярно радиусу OP есть касательная. ■

11.2 Схема решения задачи на построение

При решении задачи на построение рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1). *Анализ.* Этап принципиального решения задачи. Находят зависимость между искомой фигурой и данными задачи, находят последовательность элементарных задач на построение, по которой из данных задача получается искомая фигура. Анализ начинается с предположения, что данная фигура построена. Рассматривается чертеж, на котором нарисована искомая фигура и данные задачи. Данные задачи подбираются так, чтобы задача имела решение.

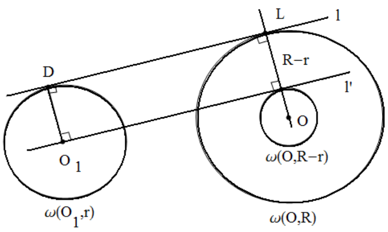
2). *Построение.* Практическая реализация пункта 1 - построение искомой фигуры и запись этапов построения.

3). *Доказательство.* Применяя теоремы геометрии, доказывают правильность совершенного построения.

4). *Исследование.* Изучается каждый этап построения (п.2), находят условия, при которых возможны этапы построения.

Пример. Построить общую касательную к двум данным окружностям $\omega(O_1,r)$, $\omega(O,R)$, $R \geqslant r$.

■ *Анализ.* Расположим данные окружности на чертеже так, чтобы задача имела решение и допустим, что искомая фигура - касательная l построена. Считаем, что это внешняя касательная двух окружностей. Проведем через точку O_1 прямую l' параллельную прямой l. Тогда l' будет касательной к окружности $\omega(O,R-r)$. Точки D, L касания прямой l с данными окружностями можно получить, как пересечение данных окружностей и прямых, перпендикулярных l' и проходящих через точки O и O_1. Можно построить одну точку касания, например L, и провести через нее прямую l, перпендикулярную радиусу OL.



Построение. 1. Применяя элементарную задачу 8 §12.1, проведем через точку O_1 касательную l' к окружности $\omega(O,R-r)$ (или к $\omega(O,R+r)$ если строим внутреннюю касательную). Пусть K - точка касания l' и $\omega(O,R-r)$.

2. Строим точку $L = [OK) \cap \omega(O,R)$.

3. Строим прямую l, проходящую через L, перпендикулярно радиусу OL (задача 3, §12.1).

Доказательство. Из построения следует, что расстояние $\rho(O_1, l) = KL = r$, следовательно l - касательная и к окружности $\rho(O, r)$.

Исследование. Пусть $d = OO_1$.

1. Пусть $d > R+r$, тогда и $d > R-r$. Точка O_1 лежит вне окружности $\omega(O, R+r)$. Задача имеет четыре решения - две внешние и две внутренние касательные.

2. Пусть $d = R + r$ (данные окружности касаются), тогда $d > R - r$. Точка O_1 лежит на окружности $\omega(O, R + r)$ и вне окружности $\omega(O, R - r)$. Можно построить две внешние касательные и одну внутреннюю.

3. Пусть $d < R + r$, и $d > R - r$. Внутренних касательных нет, есть только две внешние касательные.

4. Пусть $d < R + r$, и $d = R - r$. Одна общая касательная.

5. Пусть $d < R + r$, и $d < R - r$. Нет общих касательных.

6. Пусть $d = 0$ и $R = r$. Бесконечно много общих касательных. ■

Рассмотрим основные методы решений задач на построение.

11.3 Метод пересечений

В литературе встречается старое название этого метода - метод ГМТ (геометрического места точек).

Суть метода: допустим, что для решения задачи достаточно построить одну точку, которая обладает двумя свойствами - I и II. Для решения такой задачи можно построить множество точек, каждая из которых обладает свойством I, и множество точек, каждая из которых обладает свойством II. Тогда искомая точка будет принадлежать пересечению построенных множеств.

Рассмотрим множества точек, наиболее часто встречающиеся при решении задач методом пересечений.

1. *Множество точек, равноудаленных от двух данных точек, двух данных прямых.*

■ Множество точек, равноудаленных от двух данных точек, есть серединный перпендикуляр отрезка с концами в данных точках. Для построения серединного перпендикуляра применяем задачи 1 и 3 §12.1.

Множество точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, есть биссектрисы углов, образованных данными прямыми. Если данные прямые параллельны, то множество точек, равноудаленных от этих прямых, есть прямая, пересекающая каждый отрезок с концами на данных прямых пополам. ■

2. *Множество точек из которых данный отрезок виден под данным углом.*

■ От данного отрезка AB отложим данный угол α: $\angle BAC = \alpha$. Пусть l - серединный перпендикуляр отрезка AB, l_1 - прямая, проходящая через точку A перпендикулярно стороне AC. Пусть $O = l \cap l_1$. Точки A, B делят окружность $\omega(O, OA)$ на две открытые дуги Γ и Γ_1 (без точек A и B). Пусть дуга Γ окружности $\omega(O, OA)$ и угол $\angle BAC$ расположены по разные стороны относительно прямой (AB). Тогда из точек Γ отрезок AB виден под углом α. Из точек дуги Γ_1 отрезок AB виден под углом $\pi - \alpha$. Пусть Γ' дуга, симметричная Γ относительно прямой (AB). Тогда $\Gamma \cup \Gamma'$ - искомое множество точек. ■

3. *Множество точек, разность квадратов расстояний от каждой точки которого до двух данных точек есть величина постоянная.*

■ Даны два отрезка AB и c. Построим множество точек $F=\{M|AM^2-BM^2=c^2\}$. Сначала выясним строение множества F. Введем декартову систему координат так, чтобы ее центр совпал с точкой A, а ось x-ов совпала с прямой (AB). Пусть $B(a,0)$, точка $A(0,0)$. Точка $M(x,y)\in F$ тогда и только тогда, когда $AM^2-BM^2=c^2$. В координатах: $x^2+y^2-((x-a)^2+y^2)=c^2$ или $x=\frac{a^2+c^2}{2a}$. Это и есть уравнение множества F. Следовательно F - прямая, перпендикулярная отрезку AB и пересекающая луч $[AB)$ в точке, удаленной от точки A на расстояние $\frac{a^2+c^2}{2a}$.

Отсюда вытекает построение множества F : сначала строим отрезок $x=\frac{a^2+c^2}{2a}$ (см. алгебраический метод). Через точку $K\in[AB)$ и такую, что $AK=x$, проводим прямую F, перпендикулярную отрезку AB. ■

4. *Окружность Аполлония.*

Построим множество точек, отношение расстояний от каждой точки которого до двух данных точек есть величина постоянная.

■ Пусть дан отрезок AB и положительное число $\lambda=\frac{m}{n}$, где m,n - длины данных отрезков. Построим множество точек $F=\{M|\frac{AM}{BM}=\lambda\}$. Выясняем строение множества F. Введем декартову систему координат так, чтобы ее центр совпал с точкой A, а ось x-ов совпала с прямой (AB). Пусть $B(a,0)$, точка $A(0,0)$. Точка $M(x,y)\in F$ тогда и только тогда, когда $\frac{AM}{BM}=\lambda$ или в координатах $\sqrt{x^2+y^2}=\lambda\sqrt{(x-a)^2+y^2}$. Перепишем это уравнение в виде $x^2(1-\lambda^2)+y^2(1-\lambda^2)+2x\lambda^2a=\lambda^2a^2$. Если $\lambda=1$, то уравнение примет вид $2x=a$, следовательно множество F в этом случае является серединным перпендикуляром отрезка AB. Если $\lambda\neq1$, то уравнение можно переписать в виде

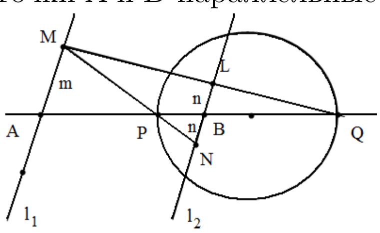
$$x^2+2x\frac{\lambda^2a}{1-\lambda^2}+y^2=\frac{\lambda^2a^2}{1-\lambda^2}.$$

Прибавим к обеим частям равенства $\frac{\lambda^4a^2}{(1-\lambda^2)^2}$, получим

$$(x+\frac{\lambda^2a}{1-\lambda^2})^2+y^2=\frac{\lambda^2a^2}{(1-\lambda^2)^2}.$$

Поэтому множество F есть окружность с центром в точке $K(-\frac{\lambda^2a}{1-\lambda^2},0)$, лежащей на оси x-ов, и радиуса $R=\sqrt{\frac{\lambda^2a^2}{(1-\lambda^2)^2}}=|\frac{\lambda a}{1-\lambda^2}|$. Эта окружность называется окружностью Аполлония.

Построение. Так как центр окружности Аполлония лежит на прямой (AB), то достаточно построить диаметральные точки $P,Q\in(AB)$. Для этого проведем через точки A и B параллельные прямые l_1 и l_2 соответственно. Пусть точка $M\in l_1$ такая,

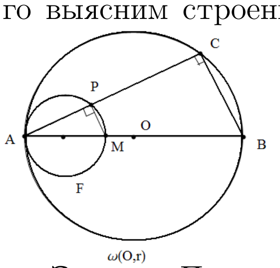


что $AM=m$, точки $L,N\in l_2$ различные и такие, что $BN=BL=n$, $P=(AB)\cap(MN)$, $Q=(AB)\cap(ML)$. Из подобия треугольников AMP и BNP находим отношение $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$, следовательно точка P принадлежит окружности Аполлония F. Аналогично, из подобия треугольников AMQ и BNQ находим, что $\frac{AQ}{QB}=\frac{m}{n}$ и точка $Q\in F$. Делим отрезок PQ пополам точкой K и проводим окружность Аполлония $\omega(K,PK)$. ■

5. *Множество точек, делящих хорды данной окружности в данном отношении.*

■ Пусть L - множество всех хорд окружности $\omega=\omega(O,r)$, имеющих общую точку A, F - множество точек, делящих каждую такую хорду из L в отношении $\lambda=\frac{m}{n}$

считая от точки A, m, n - длины данных отрезков. Построим множество F. Для этого выясним строение этого множества. Пусть AB - диаметр окружности, а точка



M принадлежит AB и множеству F. Пусть AC - хорда, тогда $\angle ACB = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр. Пусть P - основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ходу AC. Тогда треугольники $\triangle APM$ и $\triangle ACB$ подобны, поэтому $\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MB} = \lambda$. Следовательно $P \in F$. Но, точка P лежит на окружности ω_1 с диаметром AM, поэтому $F = \omega_1 \setminus \{A\}$. ■

Задача. Построить треугольник по основанию a, высоте h_a, проведенной к данной стороне, и отношению $\frac{m}{n}$ боковых сторон.

■ *Анализ.* Даны четыре отрезка a, h_a, m и n. Отложим на произвольной прямой отрезок $CB = a$. Построим третью вершину A искомого треугольника. Заметим, что точка A обладает двумя свойствами: отстоит от прямой (BC) на данном расстоянии h_a и для нее выполняется соотношение $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$. Воспользуемся методом пересечений. Построим множество F_1 точек, отстоящих от прямой (BC) на расстоянии h_a и множество $F_2 = \{M | \frac{MB}{MC} = \frac{m}{n}\}$. Множество F_1 состоит из двух прямых, параллельных прямой (CB) и отстоящих от нее на расстоянии h_a. Второе множество есть окружность Аполлония. Искомая вершина треугольника $A \in F_1 \cap F_2$.

Построение. 1). Строим множество F_1. 2). Строим множество F_2. 3). Строим точку $A \in F_1 \cap F_2$.

Доказательство следует из определения множеств F_1, F_2.

Исследование. Пункты 1) и 2) построения всегда выполняются. В пункте 3) построения возможны следующие варианты: окружность Аполлония F_2 пересекается с прямыми F_1 по четырем точкам. В этом случае задача имеет четыре решения. Если прямые F_1 касаются окружности F_2, то задача имеет два решения и если $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, то задача не имеет решений. ■

11.4 Метод преобразований

Преобразования плоскости такие, как параллельный перенос, центральная симметрия, вращение, гомотетия иногда значительно упрощают решение задачи на построение.

Рассмотрим примеры применения преобразований к решению задач на построение.

Параллельный перенос. Даны две окружности ω_1 и ω_2, прямая l и отрезок a. Построить отрезок AB с концами на этих окружностях, параллельный данной прямой и равный данному отрезку.

■ Допустим, что отрезок AB построен, $A \in \omega_1$, $B \in \omega_2$, $AB || l$ и $AB = a$. Рассмотрим параллельный перенос $P_{\overline{a}}$ плоскости на вектор $\overline{a} = \overline{AB}$. Так как точка $A \in \omega_1$, то точка $B = P_{\overline{a}}(A)$ будет принадлежать окружности $\omega = P_{\overline{a}}(\omega_1)$ и окружности ω_2 : $B \in \omega \cap \omega_2$.

Построение. 1). Строим окружность $\omega = P_{\overline{a}}(\omega_1)$. 2). $\{B_1, B_2\} = \omega \cap \omega_2$. 3). Строим точки $A_1 = P_{\overline{a}}^{-1}(B_1)$ и $A_2 = P_{\overline{a}}^{-1}(B_2)$. 4). Отрезки A_1B_1 и A_2B_2 - искомые.

Доказательство вытекает из определения параллельного переноса.

Исследование. В пункте 2) построения множество $\omega \cap \omega_2$ может состоять из двух точек, из одной точки и быть пустым. Соответственно задача может иметь два решения, одно или не иметь решений. ■

Центральная симметрия. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и точка A. Построить отрезок с концами на этих окружностях и с серединой в данной точке A.

■ Пусть отрезок PQ - искомый, $P \in \omega_1$, $Q \in \omega_2$ и точка A - его середина. Рассмотрим центральную симметрию S_A с центром в точке A. Тогда $Q = S_A(P)$. Так как $P \in \omega_1$, то $Q \in S_A(\omega_1)$. Но, точка $Q \in \omega_2$, поэтому $Q \in \omega_2 \cap S_A(\omega_1)$.

Построение. 1). Строим окружность $S_A(\omega_1)$. 2). Строим точки Q_1, Q_2 пересечения окружностей $S_A(\omega_1)$ и ω_2. 3). Строим $P_1 = S_A^{-1}(Q_1)$, $P_2 = S_A^{-1}(Q_2)$. Отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 искомые отрезки.

Доказательство вытекает из определения центральной симметрии.

Исследование. Результат построения 2) зависит от данных задачи. Множество $S_A(\omega_1) \cap \omega_2$ может состоять из двух точек, одной и быть пустым множеством. Следовательно и задача может иметь два решения, одно и не иметь решений. ■

Поворот плоскости. Даны две прямые l_1, l_2 и точка A. Построить правильный треугольник с вершинами на данных прямых и в точке A.

■ Допустим, что такой правильный треугольник ABC построен, то есть построены точки $B \in l_1$, $C \in l_2$. Рассмотрим поворот плоскости $V_A^{60^\circ}$ с центром в точке A и на угол 60° такой, что $V_A^{60^\circ}(B) = C$. Так как $B \in l_1$, то $C \in V_A^{60^\circ}(l_1)$ и $C \in l_2$, следовательно $C \in V_A^{60^\circ}(l_1) \cap l_2$.

Построение. 1). Строим $V_A^{60^\circ}(l_1)$. 2). Находим точки пересечения $C \in V_A^{60^\circ}(l_1) \cap l_2$. 3). Строим $B = V_A^{60^\circ -1}(C)$. Треугольник ABC - искомый.

Доказательство вытекает из определения поворота плоскости.

Исследование. Результат построения 2) зависит от данных задачи. Множество $V_A^{60^\circ}(l_1) \cap l_2$ может быть пустым множеством, состоять из одной точки или состоять из точек прямой l_2. Соответственно, задача может не иметь решений, иметь одно решение и бесконечно много решений. ■

Гомотетия. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы одна его сторона принадлежала основанию, а две его вершины лежали на боковых сторонах.

■ Пусть дан остроугольный треугольник ABC. Рассмотрим квадрат $PQRS$, сторона PS которого принадлежит лучу $[AC)$, а вершина Q лежит на луче $[AB)$. Таких квадратов существует много. Если возьмем два такие квадрата, то один из них получается из другого с помощью гомотетии Γ_A плоскости с центром в точке A. Среди таких квадратов есть искомый квадрат $P'Q'R'S'$, который обладает дополнительным свойством - его вершина R' принадлежит стороне BC треугольника ABC.

Построение. Строим произвольный квадрат $PQRS$, сторона PS которого принадлежит луча $[AC)$, вершина Q лежит на луче $[AB)$. Пусть точка $R' = [AR) \cap BC$. Рассмотрим гомотетию Γ_A плоскости с центром в точке A и коэффициентом гомотетии $k = \frac{AR'}{AR}$. Тогда $\Gamma_A(PQRS)$ - искомый квадрат.

Доказательство вытекает из определения и свойств гомотетии.

Исследование. Построение всегда выполнимо для нетупоугольных треугольников. ■

11.5 Инверсия

Возьмем в плоскости окружность $\omega = \omega(O, r)$ с центром в точке O и радиуса r. Определим отображение плоскости без точки O на себя по следующему правилу: если $A \to A'$, то $OA \cdot OA' = r^2$ и точка A' принадлежит лучу $[OA)$. Такое отображение называется **инверсией** плоскости относительно окружности ω, точка O называется **центром**, а r - **радиусом** инверсии.

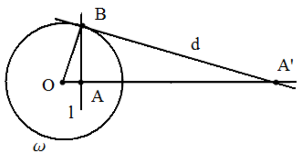
Из определения инверсии вытекают следующие простые свойства:

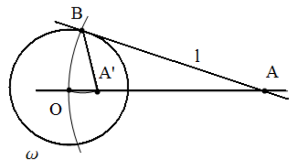
1). Если A' образ точки A, то точка A есть образ точки A'.

2). Если $OA \leqslant r$, то $OA' = \frac{r^2}{OA} \geqslant \frac{r^2}{r} = r$, следовательно, внутренние точки ($OA < r$) окружности ω инверсией переводятся во внешние точки и наоборот, точки окружности инверсии преобразуются в себя.

3). Если точка A лежит между точками O и B, то есть выполняется соотношение $O - A - B$, то для их образов справедливо соотношение $O - B' - A'$.

■ Действительно, если $O - A - B$, то $OA < OB$ или $OA = \frac{r^2}{OA'} < OB = \frac{r^2}{OB'}$, следовательно $OB' < OA'$ или $O - B' - A'$. ■





4). Если точка A приближается к точке O, то есть расстояние OA стремится к нулю, то образ A' точки A стремится к бесконечности.

Рассмотрим построение образов точек при инверсии с помощью циркуля и линейки.

1 способ. Найдем образ A' точки A, лежащей внутри окружности инверсии ω. Проведем через A прямую l, перпендикулярную OA. Пусть точка $B \in \omega \cap l$, d - касательная к ω в точке B. Тогда $A' = (OA) \cap d$. Если A точка лежит вне окружности ω, то построение идет в обратном порядке.

■ Треугольники $\triangle OAB$ и $\triangle OBA'$ подобны по построению. Поэтому $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OA'}$ или $OA \cdot OA' = OB^2 = r^2$ следовательно $A \to A'$.■

2 способ применяется для точек A таких, что окружность $\omega(A, OA) \cap \omega \neq \emptyset$. Пусть $B \in \omega(A, OA) \cap \omega$, тогда точка $A' \in \omega(B, OB) \cap [OA)$, не равная O, искомая. ■ Действительно, треугольники $\triangle OBA$, $\triangle OA'B$ подобны, поэтому $\frac{OA'}{OB} = \frac{OB}{OA}$ или $OA \cdot OA' = r^2$. ■

Лемма 11.1 *Пусть A, B -произвольные точки, A', B' их образы при инверсии относительно окружности $\omega(O, r)$. Тогда $\triangle OAB$ и $\triangle OB'A'$ подобны и*

$$A'B' = AB\frac{r^2}{OA \cdot OB}. \tag{1}$$

■ Действительно, так как $OB \cdot OB' = r^2 = OA \cdot OA'$, то $\frac{OB}{OA'} = \frac{OA}{OB'}$, что означает подобие треугольников $\triangle OAB$ и $\triangle OB'A'$.

Из подобия этих треугольников:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{\frac{r^2}{OA}}{OB} = \frac{r^2}{OA \cdot OB},$$

что доказывает равенство (1).■

Основные свойства инверсии. Пусть f - инверсия плоскости с центром в точке O и радиуса r.

1). Открытый луч с вершиной в центре инверсии преобразуется в себя. Если прямая l проходит через центр инверсии O, то множество $l \setminus \{O\}$ преобразуется в себя. При этом говорят (не совсем точно), что прямая l, проходящая через центр инверсии, преобразуется в себя.

2). Прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии.

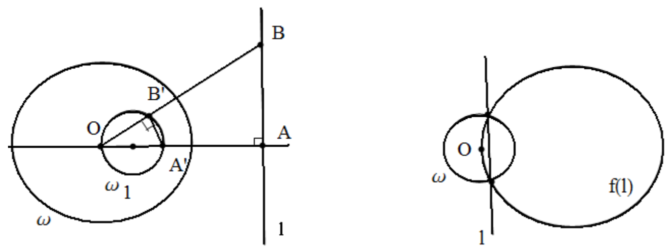
3). Окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую не проходящую через центр инверсии.

4). Окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, не проходящую через центр инверсии.

5). Инверсия сохраняет угол между кривыми.

Замечание. Под углом между кривыми в точке их пересечения M понимаем угол между касательными к этим кривым в точке M. В п. 2,3 надо учитывать, что прямая и окружность, проходящие через центр инверсии, рассматриваются с исключенной точкой - центром инверсии.

■ Доказательство свойств. Первое свойство вытекает из определения инверсии. Докажем свойство 2. Пусть прямая l не проходит через центр инверсии. Покажем,



что $f(l)$ принадлежит окружности, проходящей через точку O. Пусть A основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую l, $A' = f(A)$ и ω_1 - окружность с диаметром OA'. Возьмем произвольную точку $B \in l$, пусть $B' = f(B)$. По лемме 12.1: $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$. Отсюда следует, что $B' \in \omega_1 \setminus \{0\} \iff \angle OB'A' = \angle A = 90^\circ \iff B \in l$.

Таким образом, $f(l) = \omega_1 \setminus \{O\}$. ■

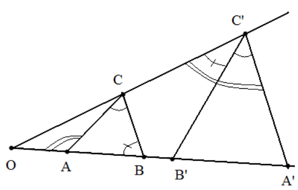
Из доказательства вытекает способ построения $f(l)$: строим точку A - основание перпендикуляра, опущенного из центра инверсии на прямую l. Строим точку $A' = f(A)$. Окружность ω_1 без точки O искомая.

Если $l \cap \omega \neq \emptyset$, то образ $f(l)$ прямой l будет лежать на окружности, проходящей через центр инверсии и точки пересечения $l \cap \omega$, так как при инверсии, точки окружности инверсии преобразуются в себя.

Доказательство свойства 3 аналогично доказательству свойства 2.■

Для доказательства свойство 4 потребуется следующая

Лемма 11.2 *Пусть точки $B \in [0, A)$, $C \notin [0, A)$, A', B', C'-образы точек A, B, C при инверсии с центром в точке O. Тогда $\angle ACB = \angle A'C'B'$.*



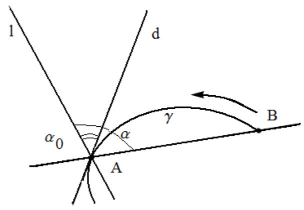
■ Считаем для определенности, что $O - A - B$. Тогда для их образов при инверсии с центром в точке O : $O - B' - A'$. Применяя лемму 12.1, можно записать, что $\triangle OCB \sim \triangle OB'C'$, поэтому $\angle OBC = \angle OC'B'$. Аналогично: $\triangle OAC \sim \triangle OC'A'$, откуда $\angle OAC = \angle OC'A'$. Угол $\angle OAC$, как внешний угол треугольника ACB, равен сумме внутренних с ним не смежных углов: $\angle OAC = \angle ABC + \angle ACB$. Учитывая это равенство , запишем, что $\angle B'C'A' = \angle OC'A' - \angle OC'B' = \angle OAC - \angle OBC = \angle ABC + \angle ACB - \angle OBC = \angle ACB$, что и требовалось доказать.■

Заметим, что ограничение "$C \notin [0, A)$" в формулировке леммы можно убрать.

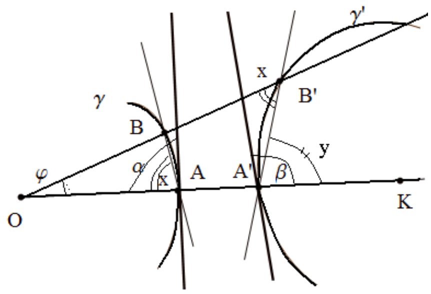
Докажем теперь свойство 4. ■ Пусть ω_1 - окружность с центром в точке O_1 не проходит через центр инверсии O. Пусть A, B - точки пересечения ω_1 с прямой OO_1. Можно считать, что $O - A - B$. Пусть A', B' образы точек A, B при инверсии, ω_2 - окружность с диаметром $A'B'$. Покажем, что окружность ω_2 - есть образ окружности ω_1 при данной инверсии. Пусть C произвольная точка окружности ω_1, C' ее образ. По лемме 12.2: $\angle ACB = \angle A'C'B'$. Отсюда следует, что точка C лежит на окружности $\omega_1 \Longleftrightarrow \angle ACB = 90^\circ \Longleftrightarrow \angle A'C'B' = 90^\circ \Longleftrightarrow C' \in \omega_2$ то есть $f(\omega_1) = \omega_2$. ■

Докажем свойство 5. ■ Напомним, что касательной к гладкой кривой γ в точке $A \in \gamma$ называется предельное положение секущей (AB) при стремлении точки B к точке A по кривой γ.

Угол между гладкими кривыми в точке их пересечения - это один из углов (все равно какой) между касательными к этим кривым в точке их пересечения. Пусть прямая d - касательная к кривой γ в точке A, l - прямая проходящая через точку A. Секущая (AB) стремится к касательной d, при стремлении точки B по кривой к точке A.



Это равносильно тому, что предел угла α между секущей и прямой l есть угол α_0 между l и касательной к кривой в точке A. Возьмем теперь кривую γ и точку $A \in \gamma$. Пусть кривая γ' и точка A' образы γ и A соответственно относительно инверсии f. Пусть α - угол между лучом $[AO)$ и γ, β - угол между лучом $[A'K)$ и γ', где точка K такая, что $O - A' - K$. Покажем, что $\alpha = \beta$. Пусть $B \in \gamma$, $B' \in \gamma'$ ее образ, φ угол между лучами $[OA)$ и $[OB)$. По лемме 12.1 угол $\angle OAB = \angle OB'A'$, обозначим эти углы x. Пусть $y = \angle B'A'K$. Так как y внешний угол треугольника $\triangle OB'A'$, то $y = \varphi + x$. Переходя к пределу в этом равенстве, когда точка B стремится к точке A по кривой γ, учитывая, что при этом $\varphi \to 0$, получим, что $\lim y = \lim x$. Но, $\lim y = \beta$, $\lim x = \alpha$. Следовательно $\alpha = \beta$.



Пусть теперь γ_1, γ_2 две гладкие кривые, пересекающиеся в точке A. Тогда угол между кривыми в точке A можно представить как сумму углов между γ_1 и лучом $[AO)$ и γ_2 и лучом $[AO)$. Последние углы сохраняются при инверсии, отсюда следует, что свойство 5 верно и в общем случае. ■

В частности, если две кривые касаются (угол между ними равен нулю), то их образы относительно инверсии также касаются.

Рассмотрим некоторые приложения инверсии и задачи.

Задачи 1. Построить образ центра данной окружности, не проходящей через центр инверсии.

Задачи 2. Пусть окружность $\omega(O_2, r_2)$ есть образ окружности $\omega(O_1, r_1)$ при инверсии относительно окружности $\omega(O, r)$. Доказать, что

$$OO_2 = \frac{rOO_1}{{OO_1}^2 - {r_1}^2}, \qquad r_2 = \frac{rr_1}{{OO_1}^2 - {r_1}^2}.$$

Задача 3. Пусть три окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ имеют радиусы a, b, c и касаются друг друга. Положим $\alpha = a^{-1}$, $\beta = b^{-1}$, $\gamma = c^{-1}$. Показать, что радиусы окружностей, касающихся ω_1, ω_2, ω_3, вычисляются по формулам

$$|\alpha + \beta + \gamma \pm 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^{\frac{1}{2}}|^{-1}.$$

Отметим, что данная задача недавно решена в самом общем случае [16].

Задача 4. Построить окружность ω, проходящую через данную точку A и касающуюся двух данных окружностей ω_1, ω_2.

■ Будем считать, что точка A не принадлежит окружностям ω_1, ω_2. Рассмотрим инверсию относительно окружности $\omega(O, r)$, $r > 0$. При этой инверсии, данные окружности преобразуются в окружности ω_1', ω_2', не проходящие через центр инверсии, а искомая окружность ω, содержащая центр инверсии A, преобразуется в прямую l. Так как ω касается ω_1 и ω_2, то их образы также будут касаться. Следовательно прямая l касается ω_1' и ω_2'. Отсюда вытекает способ построения ω : надо построить образы ω_1' и ω_2' окружностей ω_1 и ω_2, построить общие касательные l к этим окружностям (их может быть четыре!). Затем построить образы общих касательных. Ими будут окружности, проходящие через точку A и касающиеся данных окружностей ω_1, ω_2. Случаи, когда точка A принадлежит одной или двум окружностям, рассматриваются аналогично или имеют простое решение.

Задача Аполлония Построить окружность ω, касающуюся трех данных окружностей $\omega(O_1, r_1)$, $\omega(O_2, r_2)$, $\omega(O_3, r_3)$, $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$.

■ Пусть $\omega(O, r)$ есть одно из решений задачи 4 для точки O_1 и окружностей $\omega(O_2, r_2 \pm r_1)$, и $\omega(O_3, r_3 \pm r_1)$. При этом допускается вырождение окружности в точку - ее центр. Тогда $\omega(O, r \pm r_1)$ будут касаться трех данных окружностей. Задача Аполлония может иметь восемь решений.■

11.6 Алгебраический метод

Суть алгебраического метода заключается в следующем.

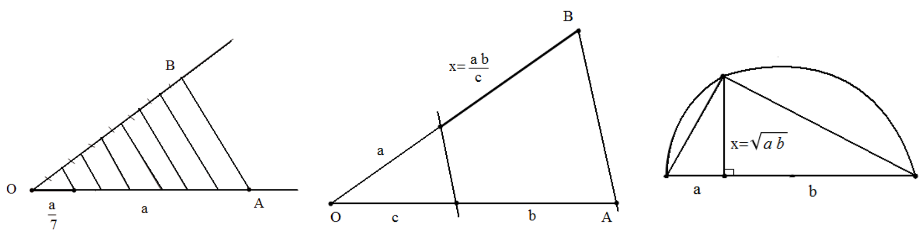
Допустим, что нам нужно построить отрезок x. Применяя теоремы школьной геометрии, выразим длину отрезка x через длины данных отрезков и величин. Строим отрезок x по полученной формуле.

Рассмотрим решения простейших задач, из которых состоит решение любой задачи на построение алгебраическим методом.

Даны отрезки a, b и c.

1). *Построить отрезок* $x = a \pm b$, $x = ma$, m *- натуральное число.*

■ На произвольной прямой возьмем точки A, B, C такие, что $A - B - C$, $AB = a$, $BC = b$. Тогда $x = AC$. Аналогично строим отрезок $x = a - b$, $a \geqslant b$ и $x = ma = a + a + ... + a$. ■



2). *Построить отрезок* $x = \frac{m}{n}a$, m, n *- натуральные числа.*

■ Сначала строим отрезок $y = \frac{a}{n}$. На луче $[OA)$ произвольного угла $\angle AOB$ отложим от вершины отрезок a. На луче $[OB)$ от вершины O последовательно откладываем n равных и произвольных отрезков и воспользуемся теоремой Фалеса. Затем строим отрезок $x = ym$. ■

3). *Построить отрезок* $x = \frac{ab}{c}$.

■ На луче $[OA)$ произвольного угла $\angle AOB$ отложим от вершины последовательно отрезки c и b. На луче $[OB)$ от вершины O отложим отрезок a и воспользуемся теоремой Фалеса. ■

4). *Построить отрезок* $x = \sqrt{ab}$.

■ Построим полуокружность опирающуюся на диаметр $a+b$. Проведем перпендикуляр к диаметру полуокружности через общий конец отрезков a и b. Отрезок этого перпендикуляра, заключенный между диаметром и полуокружностью и есть x. Для доказательства достаточно рассмотреть соответствующие подобные треугольники. ■

5). *Построить отрезок* $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$.

■ Применить теорему Пифагора. ■

6). *Построить отрезок x такой, что $x^2 - px + q^2 = 0$, p, q - данные отрезки.*

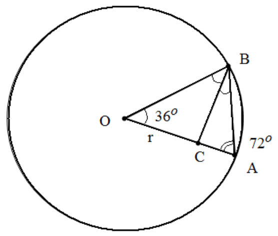
■ Так как $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$, то отрезок x можно построить, применяя задачи 2,5 и 1 в случае $p \geqslant 2q$. ■

Пример 1. Построить отрезок $x = \frac{a^3+b^3}{a(c+\sqrt{ad})}$.

■ Сведем решение задачи к последовательности решений элементарных задач. Строим последовательно отрезки $x_1 = \sqrt{ad}$, $x_2 = c + x_1$, $x_3 = \frac{aa}{x_2}$, $x_4 = \frac{bb}{x_2}$, $x_5 = \frac{bx_4}{a}$. Тогда $x = x_3 + x_5$. ■

Замечание. Не всегда задачу на построение алгебраическим методом можно представить в виде последовательности элементарных задач. Например, нельзя построить отрезок $x = \sqrt{a}$, $y = \frac{a}{b}$. В этом случае вводят отрезок e, который считают единичным отрезком. Тогда $x = \sqrt{ea}$, $y = \frac{ae}{b}$ - эти отрезки можно построить. Результат построения будет зависеть от выбранного единичного отрезка.

Пример 2. Построить правильный пятиугольник.



■ Пусть $x = AB$ - сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность с центром в точке O и радиуса r. Пусть BC биссектриса треугольника ABO, точка $C \in AO$. Так как угол $\angle(AOB) = 36°$, $\angle(OAB) = 72°$, $\angle(ABC) = 36°$, то треугольники ABC и BOA подобны, поэтому $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{OB}$ или $\frac{r-x}{x} = \frac{x}{r}$. Отсюда получаем, что $x^2 + rx - r^2 = 0$ и $x = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2}$. Построив сторону правильного десятиугольника x, легко построить и правильный пятиугольник. ■

11.7 Разрешимость задач на построение

Пусть e_0 - произвольный отрезок, будем его считать единичным отрезком. Возьмем на плоскости декартову систему координат с единичным отрезком e_0 и рассмотрим следующий вопрос. Координаты каких точек плоскости мы можем построить с помощью циркуля и линейки, располагая только отрезком e_0?

1. Можно построить точки, координаты которых есть натуральные числа p (относительно единицы e_0), то есть числа вида ne_0, n - натуральное число. Можно построить точки, координаты которых есть целые числа. Отрицательная координата точки получается откладыванием отрезка в отрицательной полуоси системы координат. Если p и q - целые числа, то можно построить точки с координатами равными $p+q$, $p-q$, $\frac{p}{q,}$ pq. Тем самым, можно построить все точки, координаты которых являются рациональными числами. Множество Q_0 рациональных чисел замкнуто

относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления и является числовым полем. Возьмем число $k_1 \in Q_0$ такое, что $\sqrt{k_1} \notin Q_0$ (например, $k_1 = 2$). Обозначим через Q_1 множество чисел вида $a + b\sqrt{k_1}$, где $a, b \in Q_0$. Можно построить все точки с координатами из Q_1. Множество Q_1 также является полем и $Q_0 \subset Q_1$. Возьмем число $k_2 \in Q_1$ такое, что $\sqrt{k_2} \notin Q_1$ (например, $k_2 = 1 + \sqrt{2}$) и построим поле $Q_2 = \{a + b\sqrt{k_2},\ \text{ где }\ a, b \in Q_1\}$. Все точки с координатами из Q_2 можно построить. И так далее. В результате получим цепочку полей $Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset ... \subset Q_k \subset ....$ Поле Q_k называется квадратичным расширением поля рациональных чисел Q_0. Заметим, что можно построить точки, координаты которых принадлежат любому квадратичному расширению поля Q_0.

2. Будем теперь считать, что построены все точки, координаты которых принадлежат некоторому квадратичному расширению Q_k, $k \geqslant 0$. Отправляясь от этих точек с помощью циркуля и линейки мы можем построить прямые и окружности и их точки пересечения. Какие числа будут координатами так построенных точек?

Возьмем две прямые l_1 и l_2, проходящие через построенные точки. Уравнение прямой l_1 можно записать в виде $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) построенных точек принадлежат Q_k. Перепишем уравнение прямой в виде $ax + by + c = 0$. Так как Q_k замкнуто относительно алгебраических операций, то числа $a, b, c \in Q_k$. Аналогично, уравнение прямой l_2 можно записать в виде $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1, b_1, c_1 \in Q_k$. Решая систему, состоящую из уравнений этих прямых, получим координаты точек пересечения $x = \frac{c_1b-cb_1}{ab_1-a_1b}$, $y = \frac{a_1c-ac_1}{ab_1-a_1b}$. Следовательно, $x, y \in Q_k$.

Возьмем прямую $l : ax + by + c = 0$ и окружность $\omega : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $a, b, c, x_0, y_0, r \in Q_k$. Рассмотрим систему, состоящую их этих двух уравнений. Решая систему методом подстановки, получим уравнение вида $my^2 + ny + l = 0$, где коэффициенты $m, n, l \in Q_k$. Отсюда $y = p + q\sqrt{w}$, $p, q, w \in Q_k$. Поэтому координата y может принадлежать некоторому полю Q_{k+1}, но не лежать в поле Q_k. Аналогично, координата x точки пересечения прямой и окружности принадлежит полю Q_{k+1}.

Координаты точек пересечения двух построенных окружностей также будут принадлежать некоторому полю Q_{k+1}.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки, исходя из некоторого единичного отрезка e_0, можно построить те и только те точки плоскости, координаты которых принадлежат квадратичным расширениям поля рациональных чисел.

3. Заметим, что любое число, принадлежащее квадратичному расширению поля рациональных чисел, является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами, то есть является алгебраическим числом.

■ Действительно, пусть $x \in Q_1$. Тогда $x = p + q\sqrt{2}$, $p, q \in Q_0$. Перепишем равенство в виде $x - p = q\sqrt{2}$ и возведем его части в квадрат: $x^2 - 2xp + p^2 = 2q^2$. Следовательно x - корень многочлена с рациональными коэффициентами.

Аналогично для любого $x \in Q_k$, $k > 0$, возводя в квадрат нужное количество раз, получим, что x - алгебраическое число. ■

Неалгебраические числа называются **трансцендентными.** В 1873 г. Ш.Эрмит доказал, что число e трансцендентное число, в 1882 г. Ф.Линдеман установил трансцендентнсть числа π. Следовательно невозможно циркулем и линейкой построить отрезок длины π или e.

Теорема 11.1 *Если кубический многочлен с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, то ни один из его корней нельзя построить с помощью* *циркуля и линейки.*

■ Рассмотрим приведенный кубический многочлен с рациональными коэффициентами, который не имеет рациональных корней: $x^3 + ax^2 + bx + c$ (1). Предположим, что корень x такого многочлена можно построить. Тогда $x \in Q_k$ и $k > 0$, так как по предположению корень не рациональное число. Можно считать, что многочлен (1) не имеет корней, принадлежащих Q_{k-1}. Пусть $x = p + q\sqrt{w}$, где $p, q, w \in Q_{k-1}$, $\sqrt{w} \notin Q_{k-1}$. Покажем, что число $y = p - q\sqrt{w}$ также является корнем многочлена (1). Подставим x и y в (1) и после преобразований, получим, что $x^3+ax^2+bx+c = m+n\sqrt{w}$ и $y^3+ay^2+by+c = m-n\sqrt{w}$, где $m, n, w \in Q_{k-1}$. Так как x корень (1), то $m+n\sqrt{w} = 0$, следовательно $n = m = 0$ (если допустить, что $n \neq 0$, то $\sqrt{w} = -\frac{m}{n} \in Q_{k-1}$, что невозможно; если допустить, что $m \neq 0$, то получим $n \neq 0$ и $\sqrt{w} \in Q_{k-1}$). Поэтому и y корень многочлена (1). При этом $x \neq y$ (в противном случае $q = 0$ и $x \in Q_{k-1}$, что противоречит предположению о корне x). Если x_3 - третий корень многочлена (1), то по теореме Виета можно записать, что $x_3 + x + y = -a$. Отсюда $x_3 = -a - (x + y) = -a - 2p \in Q_{k-1}$, что противоречит предположению, что ни один корень многочлена (1) не принадлежит Q_{k-1}. ■

Замечание. Если $x = \frac{p}{q}$ (p, q - целые числа) - рациональный корень многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, то $a\vdots q$, $d\vdots p$. В частности, если $a = 1$, то рациональный корень имеет вид $x = p$ и $d\vdots p$.

Рассмотрим четыре задачи на построение, не разрешимые циркулем и линейкой.

Задача 1. *Квадратура круга.* Построить квадрат, равновеликий данному кругу.

■ Пусть дан круг радиуса 1. Если x - сторона искомого квадрата, то $x^2 = \pi$ или $\pi = \frac{x \cdot x}{e}$, где e - единичный отрезок. Если допустить, что квадрат строиться, то можно построить и отрезок длины π, что невозможно. Данная задача не имеет решений. ■

Задача 2. *Удвоение куба.* Построить куб, объем которого в 2 раза больше, чем объем данного куба.

■ Задача сводится к решению уравнения вида $x^3 - 2 = 0$, которое не имеет рациональных корней. По теореме 12.1 данная задача не имеет решений. ■

Задача 3. *Трисекция угла.* Разделить данный угол на три равные части.

■ Ни один корень уравнения $8x^3-6x-1 = 0$ нельзя построить с помощью циркуля и линейки. Легко видеть, что $x = \cos 20^\circ$ есть корень этого уравнения. Отсюда следует, что нельзя разделить на три части угол в 60°. ■

Любой угол нельзя разделить на три части с помощью циркуля и линейки?

Задача 4. *Правильный семиугольник* нельзя построить циркулем и линейкой.

■ Рассмотрим уравнение $z^7 - 1 = 0$, решения которого есть вершины правильного семиугольника на комплексной плоскости. Число $z = 1$ корень данного уравнения. Поделим левую часть уравнения на $z - 1 : z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Поделим полученное уравнение на z^3 и перепишем в виде

$$(z + \frac{1}{z})^3 - 3(z + \frac{1}{z}) + (z + \frac{1}{z})^2 - 2 + (z + \frac{1}{z}) + 1 = 0 \qquad (2).$$

Пусть $y = z + \frac{1}{z}$. Уравнение (2) примет вид $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$. Это уравнение не имеет рациональных корней, следовательно его корни нельзя построить. Если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то $\frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ и $y = 2\cos\varphi$. Поэтому угол φ также нельзя построить. Следовательно, правильный 7-угольник нельзя построить с помощью циркуля и линейки. ■

12 Методы изображений

В этой главе рассматриваются основы начертательной геометрии - параллельное проектирование на плоскость и его свойства, изображение пространственных фигур в параллельной проекции, основные методы изображений фигур - аксонометрия, метод Монжа.

12.1 Параллельное проектирование

Пусть E - евклидово пространство, α - плоскость, вектор $\overline{p} \neq \overline{0}$ не параллелен плоскости α.

Отображение $E \to \alpha$ называется **параллельным проектированием** пространства E на плоскость α, если образом точки $M \in E$ является точка $M' \in \alpha$ такая, что $\overline{MM'} || \overline{p}$.

Вектор $\overline{p}$ называется вектором проекции. Прямая, параллельная вектору проекции, называется проектирующей прямой.

Отметим основные свойства параллельного проектирования.

1). Проектирование сохраняет отношение "между" точек прямой: если $A - B - C$, то для их проекций выполняется $A' - B' - C'$. Отсюда следует, что прямая, отрезок, луч, не параллельные вектору проекции $\overline{p}$, проектируются в прямую, отрезок, луч.

■ Пусть AC - отрезок, не параллельная вектору $\overline{p}$, A', C' - проекции точек A, C на плоскость α. По аксиоме Паша[1] (§19.4), примененной к треугольникам $\triangle ACC'$ и $\triangle AC'A'$ получим, что точка $B \in AC$ тогда и только тогда, когда ее проекция $B' \in A'C'$. Таким образом $A - B - C$ тогда и только тогда, когда $A' - B' - C'$. Поэтому отрезок AC проектируется в отрезок $A'C'$. ■

Пусть l - прямая, не параллельная вектору $\overline{p}$. Объединение проектирующих прямых, проходящих через всех точки прямой l, есть плоскость (проектирующая плоскость), пересечение которой с плоскостью α, есть прямая - проекция l.

2). Параллельные прямые, не параллельные вектору проекции, проектируются в параллельные прямые.

■ Проекция прямой на плоскость α есть пересечение проектирующей плоскости, содержащей прямую, с плоскостью α. Проектирующие плоскости, содержащие параллельные прямые, либо параллельны, либо совпадают, поэтому они пересекают плоскость проекции α либо по параллельным, либо по совпадающим прямым. ■

3). Отношение длин параллельных отрезков сохраняется при проектировании.

■ Пусть отрезки AB и C_1D_1 параллельны. Пусть точка C такая, что $BC = C_1D_1$ и $A - B - C$. По свойству 2) параллелограмм BCD_1C_1 (возможно вырожденный) спроектируется в параллелограмм. Применяя теорему Фалеса можно записать, что $\frac{AB}{C_1D_1} = \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{A'B'}{C_1'D_1'}$, где штрихами обозначены проекции соответствующих точек. ■

4). Проектирование сохраняет простое отношение трех точек.

■ Напомним, что число $\lambda = (A, B; C)$ есть простое отношение точек A, B, C если $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$. Поэтому $|\lambda| = \frac{AC}{CB}$ и $\lambda > 0$, если $A - C - B$ и $\lambda < 0$ в противном случае. Пусть A', B', C' проекции точек A, B, C. По свойству 1) простые отношения $\lambda = (A, B; C)$ и $\lambda' = (A', B'; C')$ одного знака, а по свойству 3) $|\lambda| = |\lambda'|$. Следовательно $\lambda = \lambda'$ ■

[1] Теорема 1.3 в [15].

Следствие. Пусть A', B' - проекции точек A, B, точка $C \in (AB)$, точка $C' \in (A'B')$. Если $(A, B; C) = (A', B'; C')$, то C' есть проекция точки C.

■ Пусть C_1 - проекция точки C. Тогда по свойству 4) $(A, B; C) = (A', B'; C_1)$. Отсюда и из условия $\lambda = (A', B'; C_1) = (A', B'; C')$ или $\overline{A'C_1} = \lambda\overline{C_1B}$ и $\overline{A'C'} = \lambda\overline{C'B'}$. Вычитая, получим $\overline{CC_1} = -\lambda\overline{CC_1}$ или $\overline{CC_1} = \overline{0}$. Отсюда $C = C_1$. ■

Изображением пространственной фигуры F' на плоскости α называется фигура $F \subset \alpha$, подобная проекции фигуры F' на плоскость α.

При этом, фигура F' называется **оригиналом** данного изображения, плоскость проекции α называется **плоскостью изображения**, картинной плоскостью.

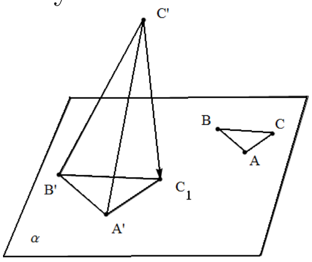
Задача. Пусть $\varphi : \alpha \to \alpha$ подобие плоскости, заданное двумя системами координат (A, B, C) и (A', B', C'). Построить образ $\varphi(M)$ данной точки M.

12.2 Изображение плоских фигур

Построение изображения плоской фигуры основывается на следующих леммах.

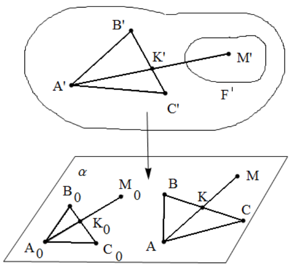
Лемма 12.1 *Любой треугольник плоскости изображений может быть изображением данного пространственного треугольника.*

■ Пусть α - плоскость изображений, $\triangle A'B'C'$ - произвольный пространственный треугольник, $\triangle ABC$ - произвольный треугольник на плоскости α. Расположим треугольник $\triangle A'B'C'$ в пространстве так, чтобы точки $A', B' \in \alpha$, а $C' \notin \alpha$. Построим в плоскости α треугольник $\triangle A'B'C_1$, подобный треугольнику $\triangle ABC$. Тогда, при проектировании пространства на плоскость α, параллельно вектору $C'C_1$, треугольник ABC будет изображением треугольника $A'B'C'$. ■



Лемма 12.2 *Пусть треугольник $A'B'C'$ и фигура F' лежат в одной плоскости, треугольник ABC есть изображение треугольника $A'B'C'$ на плоскости изображений α. Тогда изображение любой точки фигуры F' можно построить.*

■ Так как ΔABC есть изображение $\Delta A'B'C'$, то некоторое проектирование на плоскость α уже выбрано. Пусть треугольник $A_0B_0C_0$ есть проекция треугольника $A'B'C'$ на плоскости изображений α. Пусть $M' \in F'$ - произвольная точка. Пусть точка $K' = (A'M') \cap (B'C')$. На прямой B_0C_0 построим точку K_0 такую, что $(B_0, C_0; K_0) = (B', C'; K')$. Тогда по следствию к свойству 4 §13.1 точка K_0 есть проекция точки K'. На прямой (A_0K_0) строим точку M_0 такую, что $(A_0, K_0; M_0) = (A', K'; M')$. Тогда точка M_0 будет проекцией точки M'. Пусть $\varphi : \alpha \to \alpha$ подобие, переводящее треугольник $A_0B_0C_0$ в треугольник ABC. Тогда $M = \varphi(M_0)$ - изображение точки M' (Сначала строим точку $K = \varphi(K_0)$, затем на прямой (AK) строим точку $M = \varphi(M_0)$). ■



Пример 1. Построить изображение правильного шестиугольника. ■ Пусть $A'B'C'D'E'F'$ - правильный пространственный шестиугольник. На плоскости α (лист тетради) строим произвольный треугольник ABC и по лемме 13.1 считаем его изображением треугольника $A'B'C'$ в некоторой параллельной проекции. Построим точку E - изображение точки E'. Середина K' диагонали $A'C'$ лежит на диагонали $B'E'$

(можно на плоскости α нарисовать фигуру, подобную оригиналу или ее фрагмент и найти отношения длин нужных отрезков). По лемме 13.2 середина K стороны AC есть изображение точки K'. Строим точку E так, чтобы $(B', K'; E') = (B, K; E)$ или $\frac{B'E'}{E'K'} = \frac{BE}{EK}$ или $BE = \frac{B'E' \cdot BK}{B'K'}$. Отрезки $B'E'$, $B'K'$ берутся с оригинала. Теперь используем свойства оригинала - через точку E проведем прямые, параллельные отрезкам AB и BC, а через точки A и C - прямые параллельные диагонали BE. Пересечения соответствующих построенных прямых будут двумя оставшимися вершинами шестиугольника. ■

Пример 2. Построить изображение данной окружности.

■ Пусть ω' - окружность в пространстве. Проектирующие прямые, проходящие через каждую точку окружности ω', образуют эллиптический цилиндр (считаем, что плоскость окружности не параллельна проектирующим прямым). Плоскость изображений α пересекает такой цилиндр по эллипсу ω. Следовательно, проекцией окружности является эллипс. Как построить изображение окружности? Пусть диаметры AB, CD эллипса ω есть проекции перпендикулярных диаметров $A'B'$, $C'D'$ окружности ω'. Пусть l' - касательная ω', проходящая через точку C'. Тогда $l'||A'B'$. Поэтому проекция l касательной l' проходит через точку C и $l||AB$. Следовательно, l - касательная к эллипсу ω. Из теоремы Штейнера вытекает, что овальная кривая, проходящая через данные точки A, B, C, D и касающаяся прямой $l||AB$ - единственна. Поэтому для построения проекции окружности надо построить эллипс, проходящий через точки A, B, C, D и касающейся прямой $l||AB$ и $C \in l$. Так как фигура, подобная эллипсу, также есть эллипс, то и изображением окружности ω' является эллипс, обозначим его ω_0. При преобразовании подобия диаметры AB, CD эллипса ω преобразуются в диаметры эллипса ω_0 - изображения окружности. Диаметры эллипса-изображения ω_0, являющиеся изображением перпендикулярных диаметров окружности ω', называются **сопряженными диаметрами** эллипса.

Построение изображения окружности. 1). Берем три произвольные точки A, B, C плоскости изображений, не принадлежащие одной прямой. По лемме 13.1 можно считать треугольник ABC есть изображение треугольника $A'B'C'$, где $A'B'$, $C'D'$ - перпендикулярные диаметры окружности.

2). Пусть O - середина AB. Строим точку D такую, чтобы точка O была серединой CD. Тогда отрезки AB, CD будут сопряженными диаметрами эллипса-изображения.

3). Пусть Ω - окружность с диаметром AB; C_1D_1 - ее диаметр, перпендикулярный AB. Пусть f - родство с осью AB и соответствующими точками $D_1 \to D$.

4). Тогда $\omega = f(\Omega)$ искомый эллипс. Для его построения берем несколько точек на окружности Ω, и через их образы относительно f проводим плавную кривую.

■ Так как родство - биекция, то касательная к окружности Ω преобразуется в касательную l к ω. При родстве овальная кривая Ω преобразуется в овальную кривую ω, которая проходит через точки A, B, C, D и касается l. В силу единственности такой кривой ω - искомый эллипс. ■

Задача. Построить касательную к данному эллипсу, проходящую через данную точку.

12.3 Теорема Польке-Шварца

Для доказательства основной теоремы начертательной геометрии необходимо рассмотреть следующие свойства аффинного отображения. Начнем с определения.

Аффинное отображение плоскости α_1 на плоскость α_2, заданное парой декартовых систем координат, называется изометрией.

В частности, если $\alpha_1 = \alpha_2$, то изомерия есть движение.

Изометрия сохраняет расстояние между точками.

Лемма 12.3 *Пусть $f : \alpha_1 \to \alpha_2$ - аффинное отображение. Тогда f можно представить в виде композиции $f = h \circ g$, где $g : \alpha_1 \to \alpha_2$ - изометрия, $h : \alpha_2 \to \alpha_2$ - аффинное преобразование плоскости α_2.*

■ Зададим отображение f парой систем координат (R_1, R_2), где R_1 - декартова система координат (§11.22). Пусть R' - декартова система координат на плоскости α_2, а g - изометрия, заданная парой (R_1, R'), h - аффинное преобразование плоскости α_2, заданное парой (R', R_2). Тогда $f = h \circ g$. ■

Следствие. Если отображение h в формулировке леммы есть подобие, то отображение f также называется подобием. Из определения подобия плоскости следует, что любое подобие $f : \alpha_1 \to \alpha_2$ можно задать парой систем координат (R_1, R_2), где $R_1 = (O, A, B)$ - декартова система координат, а аффинная система координат $R_2 = (O', A', B')$ такая, что $O'A' = O'B'$ и $\angle A'O'B' = \frac{\pi}{2}$.

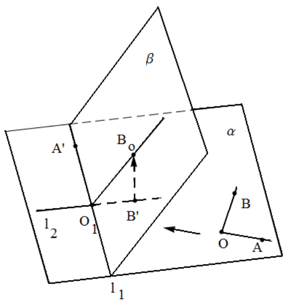
Лемма 12.4 *Пусть $f : \alpha_1 \to \alpha_2$ - параллельное проектирование. Тогда f - аффинное отображение плоскостей.*

■ Пусть $R = (A, B, C)$ - аффинная система координат на плоскости α_1, точки A', B', C' - образы точек A, B, C относительно f. Тогда $R' = (A', B', C')$ - система координат на α_2. Пусть $M(x, y) \in \alpha_1$, точка M_1 - проекция M на координатную ось (OA) $(MM_1 || OB)$. Если $M'(x', y')$, M_1' - проекции точек M, M_1, то по свойству параллельного проектирования $M'M_1' || O'B'$, а из определения координат и свойства 3) §13.1

$$x = \pm\frac{OM_1}{OA} = \pm\frac{O'M_1'}{O'A'} = x'.$$

Аналогично можно показать, что $y = y'$. Следовательно, параллельное проектирование f есть аффинное отображение. ■

Лемма 12.5 *Пусть $f : \alpha \to \alpha$ - аффинное преобразование плоскости α. Существует плоскость β такая, что композиция $pr \circ f : \alpha \to \beta$ есть подобие, где $pr : \alpha \to \beta$ - параллельное проектирование плоскости α на плоскость β, определенное вектором, перпендикулярным плоскости α.*



■ Аффинное преобразование $f : \alpha \to \alpha$ можно представить в виде $f = h_1 \circ h_2 \circ g$, где $g : \alpha \to \alpha$ - движение, а отображение h_i - сжатие плоскости α к прямой l_i, $i = 1, 2$, $l_1 \perp l_2$ (теорема 5.2). Пусть R_1 - декартова система координат с осями координат l_1 и l_2. Обозначим через $R = (O, A, B)$ декартову систему координат $R = g^{-1}(R_1)$. Тогда $R' = (h_1 \circ h_2 \circ g)(R)$ - аффинная система координат с осями l_1 и l_2. Пусть $R' = (O_1, A', B')$ такая, что $A' \in l_1$. Считаем для определенности, что $O_1A' \geqslant O_1B'$. Рассмотрим плоскость β, содержащую прямую l_1 и проходящая через точку

B_0 такую, что $O_1B_0 = O_1A'$, $O_1B_0 \perp l_1$ и B_0 - ортогонально проектируется в точку B', то есть прямая $(B_0B') \perp \alpha$ (такая плоскость существует в силу неравенства $O_1A' \geqslant O_1B'$). Пусть $pr : \alpha \to \beta$ параллельное проектирование, определенное вектором $\overline{B'B_0}$. По лемме 13.4 композиция $pr \circ f$ - аффинное отображение плоскости α на плоскость β. При этом отображении, образами точек O, A, B будут точки O_1, A', B_0 соответственно. Следовательно, аффинное отображение $pr \circ f$ можно задать парой систем координат, декартовой системой координат $R = (O, A, B)$ и аффинной системой координат $R = (O_1, A', B_0)$. Так как $O_1B_0 = O_1A'$, $O_1B_0 \perp O_1A'$, то аффинное отображение $pr \circ f$ есть подобие. ■

Теорема 12.1 (Польке-Шварца) *Любой четырехугольник, принадлежащий плоскости изображений, может служить изображением данной пространственной пирамиды.*

■ Пусть $A'B'C'D'$ - произвольная пирамида, $ABCD$ - произвольный четырехугольник плоскости изображений σ. Пусть O есть точка пересечения диагоналей $ABCD$.

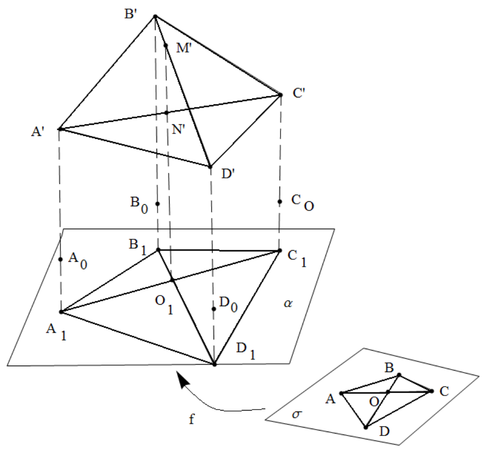
Возьмем точки $M' \in (B'D')$ и $N' \in (A'C')$ такие, что

$$(B', D'; M') = (B, D; O), \quad (A', C'; N') = (A, C; O). \tag{1}$$

Пусть плоскость α перпендикулярна прямой $(M'N')$, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ есть ортогональная проекции пирамиды $A'B'C'D'$ на плоскость α, O_1 - точка пересечения диагоналей $A_1B_1C_1D_1$. По свойству проектирования и равенства (1) можно записать, что

$$\begin{aligned} (A_1, C_1; O_1) &= (A', C'; N') = (A, C; O), \\ (B_1, D_1; O_1) &= (B', D'; M') = (B, D; O). \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $f : \sigma \to \alpha$ - аффинное отображение, заданное системами координат (A, B, D) и (A_1, B_1, D_1). Тогда из (2) и следствия §13.1 $f(C) = C_1$. По лемме 13.3 отображение $f = h \circ g$, где $g : \sigma \to \alpha$ - изометрия, $h : \alpha \to \alpha$ - аффинное преобразование. По лемме 13.5 существует плоскость β и проектирование $pr : \alpha \to \beta$ определенное вектором $\overline{M'N'}$ (вектор перпендикулярен плоскости α) такие, что $pr \circ h : \alpha \to \beta$ есть подобие. Поэтому композиция подобия с изометрией $pr \circ h \circ g = pr \circ f : \sigma \to \beta$ есть подобие. Образом точки A при этом подобии будет точка A_0 такая, что $(pr \circ f)(A) = pr(A_1) = A_0 \in (A_1A')$ так как проектирование $pr : \alpha \to \beta$ осуществляется вдоль прямой $(M'N')||(A_1A')$. Аналогично получаем, что образами точек B, C, D будет точки $B_0 \in (B_1B')$, $C_0 \in (C_1C')$, $D_0 \in (D_1D')$. Таким образом, четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$ плоскости β будет ортогональной проекцией пирамиды $A'B'C'D'$. Четырехугольник $ABCD$ плоскости изображений σ подобен четырехугольнику $A_0B_0C_0D_0$, лежащему в плоскости β. Совместим теперь плоскости σ и β. Получим, что четырехугольник $ABCD$ подобен проекции $A_0B_0C_0D_0$ пирамиды $A'B'C'D'$ на плоскость σ. ■



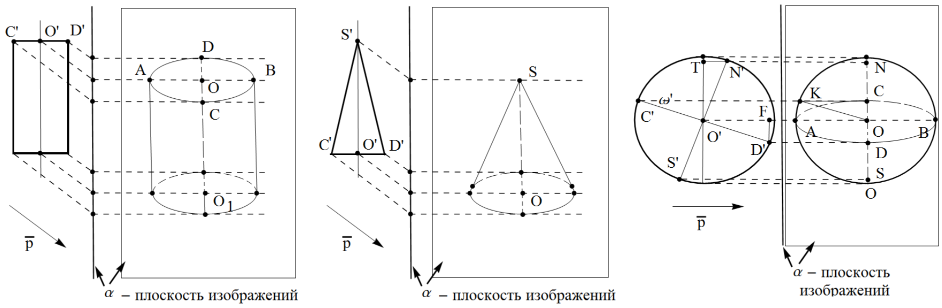
12.4 Изображение пространственных фигур

Рассмотрим примеры построения изображения фигур, наиболее часто встречающиеся в школьном курсе геометрии.

Многогранники. Построение изображений пирамиды, призмы, параллелепипеда основывается на теореме Польке-Шварца. Построим, например, изображение пятиугольной призмы $A'B'C'D'E'A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'$ (Считается, что ребра и диагонали данной призмы можно измерить).

■ Возьмем на плоскости изображений произвольный четырехугольник $ABCA_1$. По теореме Польке-Шварца его можно считать изображением пирамиды $A'B'C'A_1'$. Применяя лемму 13.2, строим изображение $ABCDE$ основания призмы $A'B'C'D'E'$. Совершим параллельный перенес в плоскости изображений многоугольника $ABCDE$ на вектор $\overline{AA_1}$, получим изображение верхнего основания призмы. ■

Цилиндр. Построим изображение школьного цилиндра, то есть части прямой круговой цилиндрической поверхности, заключенной между двумя параллельными



плоскостями, перпендикулярными оси цилиндрической поверхности. Для этого расположим цилиндр так, чтобы его ось l' была параллельна плоскости изображений α.

Пусть вектор $\overline{p}$ параллелен плоскости, перпендикулярной плоскости изображений α и содержащей ось цилиндра l'. Рассмотрим параллельное проектирование на плоскость α параллельно такому вектору $\overline{p}$. Построим изображение цилиндра в такой проекции. Изображение цилиндра в других проекциях считается не наглядным и в школе не рассматривается.

■ Пусть $A'B'$ и $C'D'$ перпендикулярные диаметры верхнего основания основания цилиндра, $A'B'||\alpha$. Тогда диаметра $A'B'$ спроецируется в отрезок AB без искажения, а диаметр $C'D'$ спроецируется в отрезок CD, длина которого определяется выбором вектора $\overline{p}$. Отрезок CD можно выбрать произвольно. Отрезки AB и CD перпендикулярны, поэтому они являются сопряженными диаметрами эллипса - проекции основания цилиндра.

Строим эллипс ω по его сопряженным диаметрам AB и CD. Высота цилиндра $O'O_1'$ спроецируется в отрезок OO_1 без искажения, $OO_1 \perp AB$. Параллельно перенесем эллипс ω на вектор $\overline{OO_1}$, получим проекцию нижнего основания. Теперь проведем общие внешние касательные к эллипсам и изображение цилиндра построено. ■

Конус. Построим изображение школьного конуса, то есть части прямой круговой конической поверхности, заключенной между параллельными плоскостями, перпендикулярными оси конической поверхности, причем одна из плоскостей проходит через вершину конуса. Ось конуса расположена параллельно плоскости изображений α. ■ Проекция основания конуса строится также, как и проекция основания цилиндра. Высота конуса проецируется без искажения. Через проекцию вершины конуса проведем касательные к эллипсу - основанию. ■

Сфера. Изображение сферы строится только в ортогональной проекции. Другие проекции сферы не дают наглядного представления о сфере и в школе не рассматриваются.

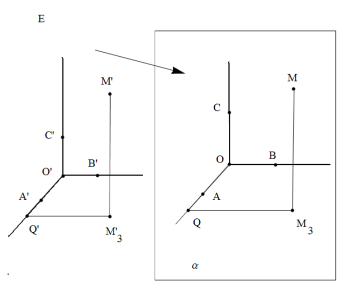
■ Пусть $A'B'$ и $C'D'$ перпендикулярные диаметры экватора ω' сферы, пусть диаметр $A'B'$ параллелен плоскости изображений α, N', S' - полюсы сферы относительно экватора ω'. Строим проекцию ω экватора ω' : диаметр экватора $A'B'$ спроецируется в отрезок AB без искажения, а проекция CD диаметра $C'D'$ зависит от расположения диаметра $C'D'$ относительно плоскости α. Отрезок CD выбирается произвольно, но так, чтобы $CD < AB$. Строим эллипс ω по его сопряженным диаметрам AB и CD. Проведем контурную окружность с диаметром AB, то есть построим проекцию большой окружности сферы, параллельной плоскости α. Осталось построить проекцию диаметра $N'S'$. Для этого выясним чему равна длина отрезка $ON = OS$, где N, S - проекции полюсов N', S', O - центр контурной окружности. Треугольник $\triangle\ KCO$ равен $\triangle\ O'D'F$. Эти треугольники прямоугольные, имеют равные гипотенузы и катеты $D'F = OC$. Треугольники $\triangle\ O'D'F$ и $\triangle\ O'N'T$ равны по двум углам и гипотенузе. Следовательно треугольники $\triangle\ KCO$ и $\triangle\ O'TN'$ равны, поэтому равны их катеты $O'T = KC$. Но, $ON = O'T$. Следовательно $ON = KC$. Таким образом, отрезок ON определяется однозначно и равен отрезку касательной KC к изображению экватора.

Следует также обратить внимание на то, что изображение полюсов не лежит на изображении контурной окружности. ■

12.5 Аксонометрия

Метод аксонометрии (измерения по осям) построения изображений основан на теореме Польке-Шварца и заключается в следующем. Пусть $R' = (O', A', B', C')$ декартова система координат в пространстве. Объявим четырехугольник $OABC$ плоскости изображений α изображением пирамиды $O'A'B'C'$. Тем самым зафиксируем некоторое параллельное проектирование пространства на плоскость изображений.

Пусть точка пространства M' имеет координаты x, y, z в системе координат R'. По координатам точки M' построим изображение M точки M'. ■ Спроектируем в пространстве точку M' ортогонально на координатную плоскость $(O'A'B')$.



Получим точку M_3'. Точку M_3' ортогонально спроектируем на координатную ось $(O'A')$. Эту проекцию обозначим через Q'. Отметим, что длины звеньев ломаной $M'M_3'Q'O'$ по абсолютной величине равны координатам точки M' : $x = \pm O'Q'$, $y = \pm Q'M_3'$, $z = \pm M_3'M'$.

Построим ломанную MM_3QO - изображение ломанной $M'M_3'Q'O'$ на плоскости α. Из свойств проекции и подобия следует, что $\frac{OQ}{OA} = \frac{O'Q'}{O'A'}$. Отсюда $OQ = \frac{OA \cdot O'Q'}{O'A'}$ и отрезок OQ можно построить, зная координату x точки M', то есть отношение $\frac{O'Q'}{O'A'}$. Откладывая вектор $\overline{OQ}$ от точки O так, чтобы , $\overline{OQ} \uparrow\uparrow \overline{OA}$, если $x \geqslant 0$ и в противоположном направлении, если $x < 0$, построим точку Q. Аналогично строим изображение отрезка $Q'M_3'$. Так как $\frac{QM_3}{OB} = \frac{Q'M_3'}{O'B'}$, то $QM_3 = \frac{OB \cdot Q'M_3'}{O'B'}$. Откладывая вектор $\overline{QM_3}$ от точки Q так, чтобы $\overline{QM_3} \uparrow\uparrow \overline{OB}$, если координаты $y \geqslant 0$ и в противоположную сторону, если $y < 0$, построим точку M_3. Теперь строим точку M. Так как $\frac{M_3M}{OC} = \frac{M_3'M'}{O'C'}$, то отрезок

$M_3M = \frac{OC\cdot M_3'M'}{O'C'}$. Откладывая вектор $\overline{M_3M}$ от точки M_3 так, чтобы $\overline{M_3M} \uparrow\uparrow \overline{OC}$, если координаты $z \geqslant 0$ и в противоположную сторону, если $z < 0$, построим точку M, изображение точки M'. ■

Точка M_3 называется вторичной проекцией точки M. Аналогично, можно построить вторичные проекции M_1, M_2 точки M, как изображение ортогональных проекций пространственной точки M' на координатные плоскости $(O'B'C')$ и $(O'A'C')$. Четырехугольник O, A, B, C называется аксонометрической системой координат и обозначается $R = (O, A, B, C)$. Заметим, что и в аналитической геометрии такой четырехугольник на чертеже рассматривался нами, как изображение пространственной системы координат. Прямые (OA), (OB), (OC) называются **аксонометрическими осями**, длины отрезков OA, OB, OC - **коэффициентами искажения по осям**. Так как $O'A' = O'B' = O'C' = 1$, то коэффициенты искажения показывают, как меняются линейные размеры фигуры при проектировании. Изображение пространственной фигуры, построенной по точкам, указанным выше способом, называется **аксонометрической проекцией.**

Заметим, что в качестве пространственной системы координат R' можно взять аффинную систему координат.

Задание точек, прямых и плоскостей. В аксонометрии обычно точки на чертеже задаются парами, указывается сама точка и ее вторичная проекция, например M, M_3 и пишут $M(M_3)$. Такое задание точки позволяет восстановить ломанную MM_3QO и, тем самым, найти отношения длин отрезков ломанной к соответствующим коэффициентам искажений, то есть, найти координаты точки-оригинала точки M. Изображение прямой (говорят просто - прямая) задается двумя точками, например, $A(A_3)$, $B(B_3)$, изображение плоскости (просто - плоскость) задается тремя точками $A(A_3)$, $B(B_3)$, $C(C_3)$, такими, чтобы точки A, B, C не принадлежали одной прямой. Будем говорить, что точка M принадлежит плоскости, заданной точками A, B, C, если оригинал точки M принадлежит плоскости, проходящей через оригиналы точек A, B, C.

Основные аксонометрические проекции. Систему координат в аксонометрии можно выбрать с большим произволом, но на практике обычно рассматривают следующие виды аксонометрических проекций:

а) *Изометрические проекции* определяются аксонометрической системой координат $R = (O, A, B, C)$ такой, что $OA = OB = OC$. Если, кроме того, $\angle BOC = 90°$, $\angle AOC = \angle AOB = 135°$, то проекция называется **кавальерной**.

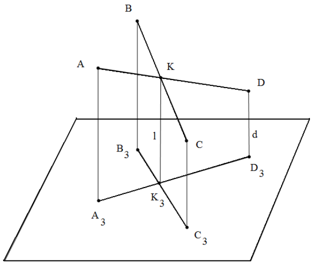
б) *Диметрические проекции* характеризуются такими соотношениями: $OA \neq OB = OC$. Если $OB = OC$, $OA = \frac{1}{2}OB$, $\angle BOC = 90°$, $\angle AOC = \angle AOB = 135°$, то проекция называется **кабинетной**.

c) *Триметрические проекции* определяются попарно не равными коэффициентами искажения.

12.6 Задачи аксонометрии

Рассмотрим позиционные и метрические задачи аксонометрии. В позиционных задачах строится пересечение двух заданных фигур на плоскости изображений. Обычно строят пересечение данного многогранника с данной плоскостью. В основе таких построений лежит следующая задача.

Задача 1. На плоскости изображений выбрана аксонометрическая система координат. Даны три точки $A(A_3)$, $B(B_3)$, $C(C_3)$ и точка D_3, принадлежащая плоскости $(A_3B_3C_3)$. В плоскости (ABC) построить точку D у которой вторичная проекция есть D_3.



■ Через точку $K_3 = (A_3D_3) \cap (B_3C_3)$ проведем прямую l, параллельную AA_3. Пусть $K = l \cap (BC)$ и d - прямая, проходящая через точку D_3, параллельно l. Тогда $D = d \cap (AK)$. ■

Задача 2. Построить сечение изображения шестиугольной призмы и плоскости, заданной тремя точками P, Q, R.

■ Присоединим к данной призме изображение системы координат $R = (O, A, B, C)$. В качестве координатной плоскости (OAB) возьмем плоскость основания призмы, а координатную ось (OC) выберем параллельно боковому ребру призмы. При таком выборе системы координат у каждой точки M призмы можно построить вторичную проекцию M_3, то есть все точки призмы становятся заданными. Изображение фигуры, при этом, называется **полным**. Теперь данная плоскость задана точками $P(P_3)$, $Q(Q_3)$, $R(R_3)$. Применяя задачу 1, строим недостающие вершины сечения. ■

Заметим, что задачу 2 можно решить "методом следов".

Метрические задачи аксонометрии связаны с определением истинных размеров оригинала по его изображению.

Задача 3. Пусть $R = (O, A, B, C)$ - изображение декартовой системы координат R' на плоскости изображений, PQ отрезок, такой, что $P = P_3$, $Q = Q_3$. Построить оригинал $P'Q'$ отрезка PQ.

■ Через точки Q, P проведем прямые, параллельные осям (OA) и (OB). Пусть L - точка пересечения этих прямых. Из свойств проекции и подобия следует, что $\frac{QL}{OB} = \frac{Q'L'}{O'B'}$ (штрихами обозначены оригиналы точек). Отсюда $Q'L' = \frac{QL}{OB} \cdot O'B'$. Здесь $O'B' = O'A' = 1$ так как система координат R' - декартова. Аналогично находим, что $P'L' = \frac{PL}{OA} \cdot O'A'$. Треугольник $P'L'Q'$ прямоугольный, так как система координат R' - декартова. Строим на чертеже прямоугольный треугольник $P'L'Q'$ по катетам. Гипотенуза $P'Q'$ - искомый отрезок. ■

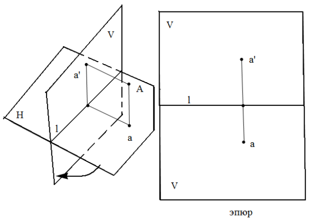
Задача 4. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка M, принадлежащая грани AA_1B_1B. Построить перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ A_1C.

■ Рассмотрим треугольник A_1KC такой, что $K \in AB$, $M \in A_1K$. Зная ребро куба AB, построим оригиналы сторон треугольника A_1KC : $KC = KB_1$, а сторону A_1C строим, применяя теорему Пифагора к ΔAA_1C. Теперь на плоскости изображений построим оригинал $A_1'K'C'$ треугольника A_1KC. Зная отношение длин отрезков A_1M и MK, построим на стороне $A_1'K'$ треугольника $A_1'K'C'$ точку M' - оригинал точки M. Опустим из точки M' перпендикуляр на сторону $A_1'C$. Пусть L' - основание этого перпендикуляра. Зная отношение длин отрезков $A_1'L'$ и $L'C'$, строим на диагонали A_1C точку L - изображение L'. Отрезок ML есть искомый перпендикуляр.■

12.7 Метод Монжа

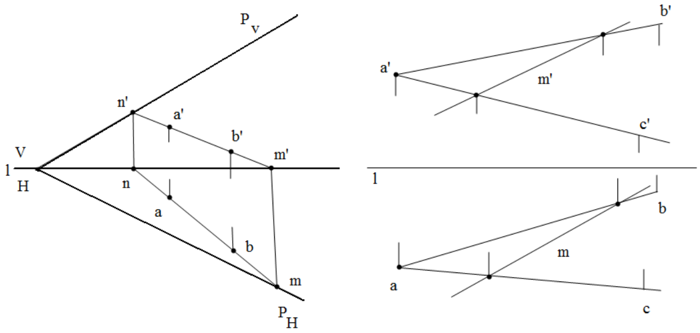
Один из основных методов изображений пространственных фигур на плоскости создан Г.Монжем (1746-1818), французским математиком, основателем начертательной геометрии. Метод Монжа заключается в ортогональном проектировании пространственной фигуры на две взаимно перпендикулярные плоскости, с последующим вращением одной плоскости около их линии пересечения до совмещения с другой. Полученный чертеж называется **эпюром**. Он не дает достаточно наглядного представления о фигуре, но позволяет получить всю информацию об оригинале или его фрагменте.

Пусть даны две взаимно перпендикулярные плоскости V и H. Первую плоскость



назовем **фронтальной** и расположим вертикально, вторую плоскость назовем **горизонтальной.** Плоскости разбивают пространство на четыре четверти. Мы будем всегда находится в одной из четвертей над горизонтальной плоскостью. Обозначим ее I. Другую верхнюю четверть обозначим - II, четверть под II обозначим III, последнюю обозначим IV. Фигура ортогонально проектируется на плоскости V и H, затем плоскость H начинаем поворачивать около их линии пересечения так, чтобы ближайшая к нам полуплоскость плоскости H удалялась от нас. Совместим плоскости, получим эпюр данной фигуры. Обозначим через $a \in H$ и $a' \in V$ горизонтальную и фронтальную проекции точки A пространства (обозначение: $A(a, a')$). Так как плоскость $aa'A$ перпендикулярна плоскостям проекции V и H, то на эпюре прямая aa' перпендикулярна оси l - линии пересечения этих плоскостей. Прямая aa' называется **линией связи** точек a и a'. Любые точки a и a' эпюра такие, что $aa' \perp l$, являются проекциями некоторой точки пространства. В связи с этим, точку на эпюре будем считать заданной, если заданы две точки a и a' такие, что прямая aa' перпендикулярна l или $a = a'$.

Если точка A лежит в четвертях I или III, то ее проекции a, a' расположены по разные стороны от прямой l, если в четвертях II или IV, то обе проекции лежат по одну сторону от l.



Рассмотрим изображения прямых и плоскостей на эпюре.

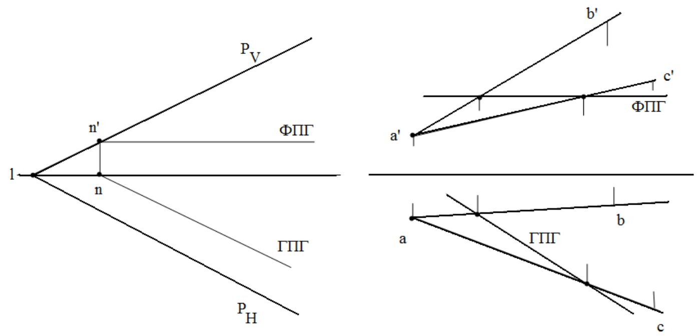
Прямая. Прямая на эпюре задается либо двумя точками $A(a, a')$ и $B(b, b')$, либо своими проекциями (p, p'). Рассмотрим взаимное расположение двух прямых (p, p') и (q, q') на эпюре. Так как у параллельных прямых проекции параллельны, то данные прямые параллельны, если параллельны их проекции $p||q$, $p'||q'$. Прямые пересекаются, если точки $m = p \cap q$, $m' = p' \cap q'$ лежат на одной линии связи и прямые не пересекаются - в противном случае.

Следом прямой называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций H или V.

Плоскость. Следом плоскости в пространстве называется прямая пересечения плоскости и одной из плоскостей проекций. Плоскость P на эпюре задается либо тремя точками $A(a, a')$, $B(b, b')$, $C(c, c')$, не лежащими на одной прямой, либо двумя пересекающимися прямыми (p, p') и (q, q'), либо своими следами P_V, P_H на плоскостях проекции V, H. Заметим, что следы плоскости P_V и P_H пересекаются на прямой l.

Прямая и плоскость. Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат плоскости. На рисунке, в первом случае, прямая (AB) принадлежит плоскости P, так как ее следы $M(m, m')$ и $N(n, n')$ принадлежат плоскости P, точнее ее следам P_H, P_V. Во втором случае плоскость задана двумя пересекающимися прямыми (AB) и (AC). Прямая (m, m') принадлежит плоскости, так как она пересекает прямые (AB) и (AC).

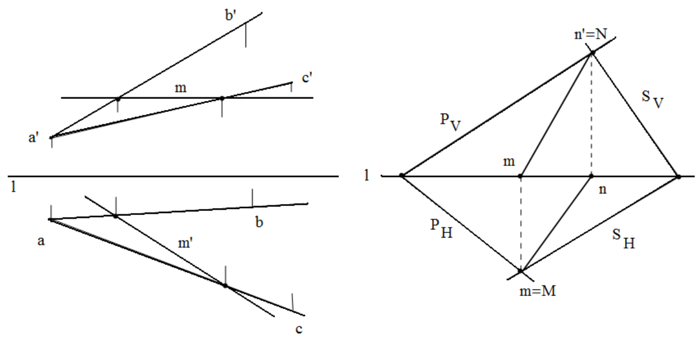
Главные линии плоскости. Среди прямых плоскости выделяются следующие прямые: **горизонталь** - прямая параллельная плоскости H, ее фронтальная проекция (ФПГ) параллельна оси l, **фронталь** - прямая параллельная плоскости V, ее горизонтальная проекция (ГПФ) параллельна оси l, **линия наибольшего ската** - прямая плоскости перпендикулярная либо горизонтали, либо фронтали.



На рисунке построены фронтали плоскости P, заданной своими следами и пересекающимися прямыми.

Взаимное расположение плоскостей. Две плоскости параллельны, если в одной плоскости есть две пересекающиеся прямые соответственно параллельные двум прямым, принадлежащим другой плоскости. В частности, две плоскости параллельны, если их соответствующие следы параллельны.

Решим одну из основных задач начертательной геометрии - построим линию пересечения двух данных плоскостей.



Рассмотрим сначала частный случай расположения плоскостей - одна плоскость задана двумя прямыми (AB) и (AC), другая плоскость P - горизонталь, то есть параллельна плоскости H. Фронтальная проекция плоскости P есть прямая, параллельная l. Для решения этой задачи найдем точки пересечения плоскости P сначала с прямой (AB), затем с прямой (AC). Полученные точки и определяют линию пересечения данных плоскостей.

На втором рисунке построена прямая пересечения двух плоскостей, заданных своими следами $P(P_H, P_V)$ и $S(S_H, S_V)$. Прямая, проходящая через точки $M(m, m')$, $N(n, n')$, есть их линия пересечения.

Рассмотри две плоскости P и Q, заданные двумя парами пересекающихся прямых. Проведем вспомогательную горизонтальную плоскость R и найдем пересечения R с данными плоскостями, то есть построим прямые $P \cap R$, $Q \cap R$. Точка пересечения этих прямых будет принадлежать пересечения плоскостей $P \cap Q$. Аналогично можно построить еще одну общую точку этих плоскостей. Прямая, проходящая через построенные точки, будет искомой.

Часть IV
Дифференциальная геометрия и топология

Дифференциальная геометрия - раздел геометрии, в котором изучаются кривые и поверхности евклидова пространства методами математического анализа. Возникновение дифференциальной геометрии относится к XVIII веку. Теория пространственных кривых была основана А.Клеро в его работе "О кривых двоякой кривизны" (1731 г.) и затем развита в трудах Л.Эйлера, Г.Монжа, Ф.Френе и других математиков. В 1827 году К.Гаусс опубликовал работу "Общие исследования о кривых поверхностях", в которой заложил основы теории поверхностей в ее современном виде.

13 Векторный анализ

Вектор-функции, рассмотренные в этом пункте, позволяют компактно излагать основные результаты дифференциальной геометрии.

Пусть E - евклидово пространство, $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ - декартов базис и G - либо интервал числовой прямой, либо открытое множество плоскости. **Вектор-функцией**, определенной на множестве G, называется отображение $G \to E$, ставящее в соответствие точке $x \in G$ вектор $\overline{r}(x) \in E$[1]. Если вектор $\overline{r}(x)$ имеет координаты $(\varphi(x), \psi(x), \chi(x))$, то вектор-функцию обозначают равенством $\overline{r}(x) = (\varphi(x), \psi(x), \chi(x))$.

Примеры. 1). Вектор-функция $\overline{r}(t) = (\sin t, \cos t, t^3)$, $t \in G = (a, b)$, определена на открытом интервале G.

2). Пусть G - открытый прямоугольник некоторой плоскости, на которой введена система координат $(u, v) : G = \{(u, v) | -a < u < a, -b < v < b\}$. Определим отображение $G \to E$ правилом $(u, v) \to (u \sin v, u \cos v, v)$. Тогда $\overline{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v)$ - вектор-функция, определенная на множестве G.

Для вектор-функций также, как и для скалярных функций в анализе, вводятся понятия предела, непрерывности, производной и доказательства их свойств для вектор-функций проводится аналогичным образом.

Пределом вектор-функции $\overline{r}(x)$ при x стремящимся к x_0 называется вектор $\overline{a}$ такой, что $\lim_{x \to x_0} |\overline{r}(x) - \overline{a}| = 0$. При этом пишут $\lim_{x \to x_0} \overline{r}(x) = \overline{a}$ или $\overline{r}(x) \to \overline{a}$ при $x \to x_0$.

При этом $\lim_{x \to x_0} |\overline{r}(x)| = |\overline{a}|$, так как $||\overline{r}(x)| - |\overline{a}|| \leqslant |\overline{r}(x) - \overline{a}|$.

Свойства предела вектор-функции. Пусть на открытом множестве G определены вектор-функции $\overline{v}(x), \overline{w}(x)$ и скалярная функция $f(x)$. Пусть $\overline{v}(x) \to \overline{a}$, $\overline{w}(x) \to \overline{b}$ и $f(x) \to f$ при $x \to x_0$. Тогда при $x \to x_0 : \overline{v}(x) \pm \overline{w}(x) \to \overline{a} \pm \overline{b}$, $f(x)\overline{v}(x) \to f\overline{a}$, скалярное произведение вектор-функций $\overline{v}(x) \cdot \overline{w}(x) \to \overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение вектор-функций $\overline{v}(x) \times \overline{w}(x) \to \overline{a} \times \overline{b}$.

Вектор-функция $\overline{r}(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \overline{r}(x) = \overline{r}(x_0).$$

[1] Точнее, вектор $\overline{r}(x)$ принадлежит векторному пространству переносов евклидова пространства.

Если вектор-функция $\overline{r}(x)$ непрерывна в каждой точке множества G, то $\overline{r}(x)$ называется непрерывной на множестве G.

Пусть вектор-функция $\overline{r}(t)$ определена на открытом интервале (a, b).

Производной вектор-функции $\overline{r}(t)$ в точке $t_0 \in (a, b)$ называется предел

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overline{r}(t) - \overline{r}(t_0)}{t - t_0},$$

если он существует. Обозначения производной: $\frac{d\overline{r}}{dt}(t_0)$, $\overline{r}'(t_0)$. При этом говорят, что вектор-функция $\overline{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0.

Свойства производной вектор-функции: Пусть вектор-функции $\overline{v}(t)$ и $\overline{w}(t)$ и скалярная функция $f(t)$ - дифференцируемы. Тогда дифференцируемы функции $\overline{v}(t) \pm \overline{w}(t)$, $f(t)\overline{v}(t)$, $\overline{v}(t) \cdot \overline{w}(t)$, $\overline{v}(t) \times \overline{w}(t)$ и

1. $(\overline{v}(t) \pm \overline{w}(t))' = \overline{v}'(t) \pm \overline{w}'(t)$.
2. $(f(t)\overline{v}(t))' = f'(t)\overline{v}(t) + f(t)\overline{v}'(t)$.
3. $(\overline{v}(t) \cdot \overline{w}(t))' = \overline{v}'(t) \cdot \overline{w}(t) + \overline{v}(t) \cdot \overline{w}'(t)$.
4. $(\overline{v}(t) \times \overline{w}(t))' = \overline{v}'(t) \times \overline{w}(t) + \overline{v}(t) \times \overline{w}'(t)$.

Пример. Найдем производную постоянной вектор-функции $\overline{v}(t) = \overline{a}$, где вектор $\overline{a}$ не зависит от t :

$$\overline{v}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{v}(t) - \overline{v}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{a} - \overline{a}}{t - t_0} = \overline{0}.$$

Под частной производной вектор-функции $\overline{r}(u, v)$ двух аргументов u, v будем понимать обычную производную вектор-функции $\overline{r}(u, v)$ по u (или v) как вектор-функции одного аргумента u (или v). Частная производная от частной производной определяется аналогично. Таким образом

$$\frac{\partial \overline{r}(u, v)}{\partial u} = \frac{d}{du}(\overline{r}(u, v)|_{v=const}), \qquad \frac{\partial^2 \overline{r}(u, v)}{\partial v \partial u} = \frac{d}{dv}(\frac{\partial \overline{r}(u, v)}{\partial u}|_{u=const}) \ldots$$

Обозначим через $C^k(G)$, $k > 0$, класс функций, определенных на множестве G, обладающих непрерывными производными до k порядка включительно.

В дальнейшем, говоря о гладкой кривой, будем иметь в виду функции, достаточное число раз дифференцируемые.

Пусть $(x(t), y(t), z(t))$ координаты вектора $\overline{r}(t)$ в базисе $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$:

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}. \tag{1}$$

Это равенство и свойства предела и производной означают, что, если **координатные** функции $x(t), y(t), z(t)$ вектор функции $\overline{r}(t)$ непрерывны (имеют предел) или дифференцируемы, то и вектор функция $\overline{r}(t)$ непрерывна (имеет предел) или дифференцируема. Верно и обратное утверждение: домножим скалярно части равенства (1) на векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$: $\overline{r}(t)\overline{i} = x(t)$, $\overline{r}(t)\overline{j} = y(t)$, $\overline{r}(t)\overline{k} = z(t)$. Следовательно, если вектор-функция $\overline{r}(t)$ непрерывна (имеет предел) или дифференцируема, то такими же свойствами обладают ее координатные функции.

Итак, вектор-функция $\overline{r}(t)$ дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируемы ее координатные функции $x(t), y(t), z(t)$, при этом $\overline{r}'(t) = x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j} + z'(t)\overline{k}$ или $\overline{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Примеры. 1). Вектор-функция $\overline{r}(t) = (\sin t, \cos t, t^3)$, $t \in (0, \pi)$, ∞-дифференцируема, так как ее координатные функции $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $z(t) = t^3$ являются ∞-дифференцируемы. Поэтому вектор-функция $\overline{r}(t) \in C^\infty((0, \pi))$, а $\overline{r}'(t) = (\cos t, -\sin t, 3t^2)$, $\overline{r}''(t) = (-\sin t, -\cos t, 6t), \dots$.

2). Вектор-функция двух аргументов $u, v : \overline{r}(u, v) = (u^2v^2, u \sin v, u + v)$, заданная в области $G : 0 < u, v < 1$, ∞-дифференцируема, так как ее координатные функции $x(u, v) = u^2v^2$, $y(u, v) = u \sin v$, $z(u, v) = u + v$ ∞-дифференцируемы по переменным u, v в области G. Поэтому $\overline{r}(u, v) \in C^\infty(G)$ и $\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} = (2uv^2, \sin v, 1)$, $\frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = (2u^2v, u \cos v, 1)$, $\frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial u \partial v} = (4uv, \cos v, 0)$ и так далее.

Лемма 13.1 *Пусть* $\overline{r}(t)$ - **единичная** *вектор-функция, то есть такая, что* $|\overline{r}(t)| = 1$ *для всех значений параметра* t. *Тогда* $\overline{r}(t) \perp \overline{r}'(t)$ *для всех* t.

■ Условие $|\overline{r}(t)| = 1$ означает, что скалярное произведение $\overline{r}(t) \cdot \overline{r}(t) = 1$. Дифференцируя это тождество, получим $\overline{r}'(t) \cdot \overline{r}(t) + \overline{r}(t) \cdot \overline{r}'(t) = 0$ или $\overline{r}'(t) \cdot \overline{r}(t) = 0$, что означает перпендикулярность векторов $\overline{r}(t)$ и $\overline{r}'(t)$ для всех t. ■

14 Теория кривых

14.1 Понятие кривой в евклидовом пространстве

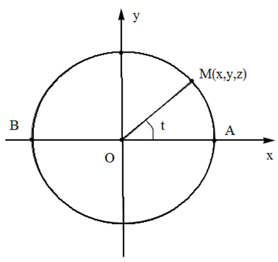
Зафиксируем в пространстве E декартову систему координат $(O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ и пусть J - подмножество числовой прямой R.

Будем говорить, что подмножество $\gamma \subset E$ задано уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1}$$

при $t \in J$, если для любого значения $t \in J$ точка $(x(t), y(t), z(t)) \in \gamma$ и для любой точки $(x, y, z) \in \gamma$ найдется единственное $t \in J$ такое, что x, y, z, t есть решения уравнений (1).

Пример. Пусть γ - окружность в плоскости XOY с центром в точке O и радиуса R. Пусть t - ориентированный угол $\measuredangle(\overline{OA}, \overline{OM})$. Тогда для координат (x, y, z) точки $M \in \gamma$ можно записать



$$x = R \cos t, \ y = R \sin t, \ z = 0 \tag{2}$$

Если считать, что $t \in (-\pi, \pi)$, то (2) есть задание $\gamma \setminus \{B\}$ - окружности без точки. Если считать, что $t \in [-\pi, \pi]$, то (2) не будет задавать окружность, так как в этом случае нарушается требование единственности t : для точки $B(-R, 0, 0)$, например, найдутся два значения $t = -\pi, \pi$ такие, что $-R, 0, 0, t$ - решения (2).

Для задания всей окружности надо считать, что $t \in (-\pi, \pi]$.

Подмножество $\gamma \subset E$ называется **элементарной гладкой кривой** (и принадлежит классу C^k, $k \geqslant 1$), если γ можно задать уравнениями:

$$x = x(t), \ \ y = y(t), \ \ z = z(t), \ \ t \in (a, b), \tag{3}$$

где $x(t),\ \ y(t),\ \ z(t)$ - k раз непрерывно дифференцируемые функции (принадлежат классу $C^k((a,b))$) такие, что производные $x'(t),\ \ y'(t),\ \ z'(t)$ не обращаются одновременно в ноль на (a,b).

Последнее требование называется свойством **регулярности** кривой γ.

Подмножество $\gamma \subset E$ называется **простой кривой**, если для любой точки $M \in \gamma$ существует открытый шар B с центром в точке M такой, что $B \cap \gamma$ - элементарная гладкая кривая.

Ясно, что элементарная гладкая кривая является простой кривой.

В дальнейшем, говоря о кривой, будем иметь ввиду элементарную гладкую кривую.

Примеры. 1. Прямая в пространстве есть элементарная гладкая кривая, так как она допускает задание вида: $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, $z = z_0 + \gamma t$, $t \in R$. Функции $x(t) = x_0 + \alpha t$, $y(t) = y_0 + \beta t$, $z(t) = z_0 + \gamma t$ - гладкие функции от t (класса $C^\infty(R)$) и производные $x'(t) = \alpha$, $y'(t) = \beta$, $z'(t) = \gamma$ не обращаются одновременно в ноль.

2. Окружность - простая кривая. Действительно, пусть M - произвольная точка окружности, соответствующая значению параметра t_0 (см. пример выше). Тогда часть окружности, лежащую в достаточно малом открытом шаре с центром в точке M, можно задать уравнениями вида (2) при $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $\ \varepsilon > 0$ - достаточно малое число. Так как $x' = -R\sin t,\ y' = R\cos t,\ z' = 0$, то $x',\ y',\ z'$, не обращаются одновременно в ноль. Это значит, что данная окрестность точки M - элементарная гладкая кривая.

Уравнения (3), при выполнении требований регулярности, называются **параметрическими уравнениями** кривой γ. При этом говорят, что кривая γ задана уравнениями (3).

Обозначим через $\overline{r} = (x,y,z)$, $\overline{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$ - радиус векторы точек (x,y,z) и $(x(t),y(t),z(t))$. Тогда три уравнения (3) равносильны одному векторному уравнению $\overline{r} = \overline{r}(t)$. Таким образом, множество γ - гладкая элементарная кривая, если γ может быть задано векторным уравнением $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $t \in (a,b)$, $\overline{r}(t)$ - гладкая вектор-функция и $\overline{r}'(t) \neq 0$ для всех t.

Пример. Уравнения $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = b\,t,\ \ t \in R$, где a, b - константы, задают, так называемую, винтовую линию. Эту кривую можно задать одним векторным уравнением $\overline{r} = \overline{r}(t)$, где $\overline{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t)$.

Допустимая замена параметра. Пусть $\overline{r} = \overline{r}(t)$ - параметризация кривой γ. Если $t = t(\tau)$, $\tau \in (c,d)$, - гладкая монотонная функция, то $\overline{r} = \overline{r}(t(\tau))$ также параметризация кривой γ.

Действительно, $\overline{r}_1(\tau) = \overline{r}(t(\tau))$ - гладкая вектор-функция на (c,d), как композиция гладких функций и $\frac{d\overline{r}_1}{d\tau} = \frac{d\overline{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau} \neq 0$ так как $t(\tau)$ - монотонная функция и, значит, $\frac{dt}{d\tau} \neq 0$ на (c,d). Такую замену параметра в вектор-функции $\overline{r}(t)$, задающей кривую γ, называют **допустимой заменой параметра.**

Неявное задание кривой. Пусть γ - есть множество всех точек пространства E, координаты которых удовлетворяют системе двух уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где функции $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ - k раз непрерывно дифференцируемы по всем переменным, $k \geqslant 1$ и

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} = 2 \qquad (4')$$

в каждой точке γ. Здесь $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ и т.д. - первые частные производные. При выполнении этих условий γ - простая кривая.

Задание простой кривой системой (4) и условием $(4')$ называется неявным задание кривой.

■ Действительно, пусть $M \in \gamma$ - произвольная точка кривой и, допустим, что в точке M условие $(4')$ порождено неравенством

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявных функциях существует окрестность B точки M (открытый шар с центром в точке M) такая, что множество $B \cap \gamma$ задается уравнениями вида $y = f(x)$, $z = g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ - гладкие функции (класса C^k), определенные на некотором интервале (a,b). Полагая $x = t$, получим, что при $t \in (a,b)$ уравнения $x = t$, $y = f(t)$, $z = g(t)$ - являются параметрическими уравнениями множества $\gamma \cap B$. При этом функции t, $f(t)$, $g(t)$ - гладкие и их производные одновременно в ноль не обращаются. ■

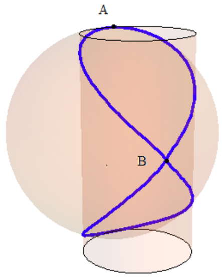
Следствие. Пусть множество γ принадлежит координатной плоскости XOY и задано уравнением $f(x,y) = 0$ в системе координат $(O, \bar{i}, \bar{j})$. Тогда γ будет простой кривой, если $f(x,y)$ - гладкая функция и ее производные f_x, f_y не обращаются одновременно в ноль на γ.

■ Действительно, в пространственной системе координат $(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ множество γ задается системой $f(x,y) = 0$, $z = 0$. Отсюда следует, что γ - простая кривая, если функции $F(x,y,z) = f(x,y)$, $G(x,y,z) = z$ дифференцируемы и выполняется условие $(4')$:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} f_x & f_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

в каждой точке γ. Последнее верно, если производные f_x, f_y не обращаются в ноль одновременно. ■

Примеры. 1). Окружность $\gamma: \ x^2 + y^2 - 1 = 0$ - простая кривая, так как функция $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ гладкая и $f_x = 2x$, $f_y = 2y$ не обращаются одновременно в ноль на γ.



2). Пусть γ - множество всех решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \\ x^2 + (y - \frac{r}{2})^2 - \frac{r}{2}^2 = 0, \end{cases} \qquad (5)$$

то есть γ - это пересечение сферы с центром в точке 0 и радиуса r и цилиндра радиуса $\frac{r}{2}$, одной из образующих которого является ось OZ. Такая кривая называется кривой Вивиани. В (5) стоят гладкие (∞ - дифференцируемые) функции $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ и $G(x,y,z) = x^2 + (y - \frac{r}{2})^2 - \frac{r}{2}^2$. Проверим условие $(4')$ в точке $A(0,0,r)$, например. Так как, $F_x = 2x$, $F_y = 2y$, $F_z = 2z$, $G_x = 2x$, $G_y = 2(y - \frac{r}{2})$, $G_z = 0$, то в точке $A(0,0,r)$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2r \\ 0 & -r & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Таким образом, в некоторой окрестности точки A уравнения (5) задают гладкую кривую, что нельзя сказать о точке $B(0,r,0)$, в этой точке условие $(4')$ не выполняется.

14.2 Касательная к гладкой кривой

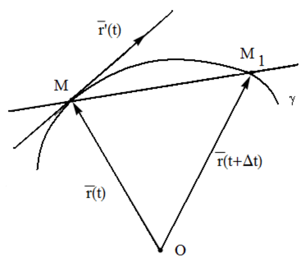
Рассмотрим гладкую кривую γ, заданную уравнением $\overline{r} = \overline{r}(t)$. Пусть точка $M \in \gamma$, $\overline{OM} = \overline{r}(t)$.

Касательной к кривой γ в точке $M \in \gamma$ называется прямая, проходящая через точку M параллельно вектору $\overline{r}'(t)$. Вектор $\overline{r}'(t)$ называется **касательным** вектором к кривой γ в точке M.

Заметим, что $\overline{r}'(t) \neq 0$ для всех t, поэтому касательная существует в каждой точке гладкой кривой.

Дадим геометрическую характеристику касательной к γ в точке M. Возьмем точку $M_1 \in \gamma$, близкую к M, $M_1 \neq M$.

Устремим теперь точку M_1 по кривой γ к точке M. Предельное положение секущей (MM_1) при стремлении M_1 к M есть касательная к кривой γ в этой точке M.



■ Действительно, если $\overline{r}(t+\Delta t)$ - радиус-вектор точки M_1, то разность $\overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t)$ есть направляющий вектор секущей (MM_1). Так как $M_1 \neq M$, то $\Delta t \neq 0$, следовательно, и $\frac{\overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t)}{\Delta t}$ также направляющий вектор прямой (MM_1). Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ есть $\overline{r}'(t)$ - направляющий вектор касательной. ■

Это геометрическое свойство касательной показывает, что касательная не зависит от выбора допустимой параметризации кривой.

Уравнение касательной к кривой γ, заданной векторным уравнением $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, в точке $M_0 \in \gamma$.

Пусть $M(x,y,z)$ - произвольная точка такой касательной. Так как точка касания M_0 имеет координаты $(x(t), y(t), z(t))$, а направляющий вектор касательной $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, то можно записать параметрические уравнения касательной:

$$\begin{cases} x = x(t) + \tau x'(t), \\ y = y(t) + \tau y'(t), \\ z = z(t) + \tau z'(t), \end{cases}$$

здесь τ - параметр точки $M(x,y,z)$ касательной.

Исключая τ из этих уравнений, получим каноническое уравнение касательной:

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)}.$$

Пример. Пусть γ - винтовая линия, заданная векторным уравнением $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $\overline{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t)$. Напишем уравнение касательной к кривой γ в точке $M_0 \in \gamma$, соответствующей значению параметра $t = \frac{\pi}{4}$.

■ Так как радиус-вектор точки M_0 имеет координаты $\overline{r}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b\pi}{4})$, то $M_0(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b\pi}{4})$. Так как $\overline{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$, то касательный вектор к винтовой линии в точке $M_0 \in \gamma$ равен $\overline{r}'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, b)$. Следовательно

$$\frac{x - \frac{a}{\sqrt{2}}}{-\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{z - \frac{b\pi}{4}}{b}$$

- каноническое уравнение касательной. ■

Уравнение касательной к кривой, заданной неявно. Напишем уравнение касательной к простой кривой γ, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$.

■ Так как γ - простая кривая, то в некоторой окрестности точки M_0 кривую γ можно задать параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тогда для всех t : $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, $G(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Дифференцируя эти тождества по t, получим систему :

$$\begin{cases} F_x\, x'(t) + F_y\, y'(t) + F_z\, z'(t) = 0, \\ G_x\, x'(t) + G_y\, y'(t) + G_z\, z'(t) = 0. \end{cases}$$

Решения этой системы

$$x' = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \quad y' = -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}, \quad z' = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$$

есть координаты направляющего вектора касательной. Следовательно,

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} \tag{1}$$

- каноническое уравнение касательной к кривой γ в точке M_0. Здесь все производные вычислены в точке M_0. ■

Примеры. 1). Напишем уравнение касательной к кривой, принадлежащей плоскости XOY и заданной уравнением $f(x, y) = 0$ в системе координат $(O, \overline{i}, \overline{j})$.

■ Так как в пространстве кривая задается системой $f(x, y) = 0$, $z = 0$, то уравнение ее касательной (1) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{f_x} = \dfrac{y - y_0}{f_y}, \\ z = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим уравнение касательной в системе координат плоскости XOY:

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y}. \ ■$$

2). Направляющим вектором касательной к линии Вивиани, например в точке $A(0,0,r)$, есть вектор

$$\overline{p} = (\begin{vmatrix} 0 & 2r \\ -r & 0 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{vmatrix})||\overline{i} = (1,0,0).$$

Следовательно, $x = t$, $y = 0$, $z = r$ - параметрические уравнения касательной.

14.3 Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой

Пусть кривая γ (класса C^k, $k \geqslant 1$) задана уравнением $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $t \in (a,b)$. Рассмотрим дугу $\gamma' \subset \gamma$, соответствующую интервалу $[t_0, t_1] \subset (a,b)$. Из анализа известно, что длина L дуги γ' вычисляется по формуле :

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\overline{r}'(t)|dt. \tag{1}$$

Если $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то $\overline{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ и, следовательно,

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

Пусть теперь $L(t)$ - длина дуги $[t_0, t]$ или $[t, t_0]$ кривой γ. Определим функцию равенствами: $s(t) = L(t)$, если $t \geqslant t_0$ и $s(t) = -L(t)$, если $t \leqslant t_0$. Тогда по формуле (1):

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\overline{r}'(\tau)|d\tau. \tag{1'}$$

Отсюда и из свойства интеграла,

$$\frac{ds}{dt} = |\overline{r}'(t)| > 0. \tag{2}$$

Поэтому функция $s(t) \in C^k((a,b))$ и является монотонной функцией на (a,b). По теореме об обратной функции для $s(t)$ существует обратная функция $t(s)$, также монотонная, класса гладкости C^k и определенная на интервале $(-L(a), L(b))$.

В векторном уравнении кривой $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(t)$ сделаем допустимую замену параметра $t = t(s)$ и получим новую параметризацию кривой $\gamma : \overline{r} = \overline{r}_1(t)$, где $\overline{r}_1(s) = \overline{r}(t(s))$, $s \in (-L(a), L(b))$. Параметризация $\gamma : \overline{r} = \overline{r}_1(s)$ называется естественной параметризацией кривой γ, параметр s - натуральным параметром кривой γ.

Лемма 14.1 *Пусть $\overline{r} = \overline{r}(s)$ - естественная параметризация кривой γ. Тогда для всех значений параметра s справедливо равенство $|\overline{r}'(s)| = 1$.*

■ Найдем натуральный параметр s кривой γ, применяя формулу (1′):

$$s = \int_{s_0}^{s} |\overline{r}'(t)|dt$$

Отсюда, дифференцируя по s, получим $|\overline{r}'(s)| = 1$. ■

Пример. Найдем естественную параметризацию винтовой линии $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(t)$, $\overline{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t)$.

■ Сначала проверим, является ли t - натуральным параметром? Для этого найдем $|\overline{r}'(t)|$. Так как $\overline{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ то $|\overline{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$. Если $\sqrt{a^2+b^2} \neq 1$, то t не является натуральным параметром в силу леммы 15.1. По формуле (1′): $s = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}d\tau = \sqrt{a^2+b^2}t$. Обратная к $s(t)$ функция имеет вид $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Совершим замену параметра t в вектор-функции $\overline{r}(t)$ по этой формуле, получим естественную параметризацию кривой $\gamma : \overline{r} = \overline{r}_1(s)$, где

$$\overline{r}_1(s) = (a\,\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\,\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b\,s}{\sqrt{a^2+b^2}}).\ ■$$

14.4 Кривизна кривой. Каноническая система координат

Пусть γ - гладкая кривая, заданная естественной параметризацией $\overline{r} = \overline{r}(s)$. Определим меру искривления кривой γ в точке $M \in \gamma$ как скорость поворота касательной к кривой в данной точке. Возьмем точку $M_1 \in \gamma$ близкую к M, $M_1 \neq M$. Пусть острый угол θ угол между касательными к кривой γ в точках M и M_1, а $|\Delta s|$ - длина дуги кривой MM_1.

Кривизной кривой γ в точке M называется предел отношения $\frac{\theta}{|\Delta s|}$, когда точка M_1 стремится по кривой к точке M (при этом, $\theta \to 0, \quad \Delta s \to 0$).

Теорема 14.1 *Пусть γ - гладкая кривая, заданная естественной параметризацией $\overline{r} = \overline{r}(s)$. Тогда кривизна $k = k(s)$ кривой γ в точке s равна*

$$k = |\overline{r}''(s)|.$$

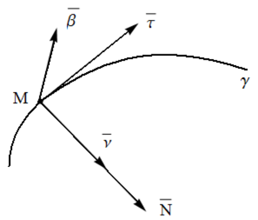
■ Пусть точке $M \in \gamma$ соответствует значению параметра s, то есть $\overline{r}(s) = \overline{OM}$, а точке $M_1 \in \gamma$, близкой к M, соответствует значение параметра $s + \Delta s$: $\overline{r}(s + \Delta s) = \overline{OM}_1$. Тогда острый угол $\Delta\theta$ между касательными в точках M и M_1 равен углу между касательными векторами $\overline{r}'(s)$ и $\overline{r}'(s+\Delta s)$ к кривой γ в этих точках. Так как касательные векторы $\overline{r}'(s)$ и $\overline{r}'(s+\Delta s)$ единичные, то $|\overline{r}'(s+\Delta s) - \overline{r}'(s)| = \sqrt{(\overline{r}'(s+\Delta s) - \overline{r}'(s))^2} = \sqrt{2(1-\cos(\theta))} = 2\sin\frac{\theta}{2}$. Поэтому

$$\Big|\frac{\overline{r}'(s+\Delta s) - \overline{r}'(s)}{\Delta s}\Big| = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\frac{\theta}{|\Delta s|}.$$

Отсюда получаем

$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\Big(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\Big)^{-1}\Big|\frac{\overline{r}'(s+\Delta s) - \overline{r}'(s)}{\Delta s}\Big| = |\overline{r}''(s)|.\ ■$$

Каноническая система координат. Пусть γ - гладкая кривая, заданная естественной параметризацией $\overline{r} = \overline{r}(s)$. С каждой точкой $M \in \gamma$ свяжем три вектора



$\overline{\tau}$, $\overline{\nu}$ и $\overline{\beta}$ следующим образом. Если точке M соответствует значение параметра s, то положим $\overline{\tau} = \overline{r}'(s)$. Далее считаем, что $\overline{r}''(s) \neq \overline{0}$ (то есть кривизна $k \neq 0$) для всех s. Через вектор $\overline{\nu}$ обозначим **орт** вектора $\overline{r}''(s)$ (то есть, единичный вектор сонаправленный с вектором $\overline{r}''(s)$). Вектор $\overline{\beta}$ считаем равным векторному произведению $\overline{\tau}(s) \times \overline{\nu}(s)$. Для любой точки s три вектора $\overline{\tau}(s)$, $\overline{\nu}(s)$, $\overline{\beta}(s)$ образуют декартов базис. Действительно, по лемме 15.1 $|\overline{r}'(s)| = 1$ для всех s, поэтому вектор-функция $\overline{\tau}(s)$ - единичная: $|\overline{\tau}(s)| = 1$. По лемме 14.1 вектор $\overline{N}(s) = \overline{\tau}'(s)$ перпендикулярен $\overline{\tau}(s)$ следовательно и орт $\overline{\nu}(s)$ вектора $\overline{N}(s)$ будет перпендикулярен $\overline{\tau}(s)$. Наконец, из определения векторного произведения следует, что $\overline{\beta}(s) \perp \overline{\nu}(s)$, $\overline{\beta}(s) \perp \overline{\tau}(s)$ и $|\overline{\beta}|(s) = 1$.

Вектор $\overline{N}(s) = \overline{r}''(s)$ называется **вектором кривизны** кривой γ в точке s, его длина $|\overline{N}(s)|$ равна кривизне $k(s)$ кривой γ в точке s.

Декартова система координат $(M, \overline{\tau}, \overline{\nu}, \overline{\beta})$, определенная в каждой точке s кривой γ, называется **канонической системой координат** кривой γ в точке s. При этом, первая координатная ось - касательная, вторая координатная ось называется **главной нормалью** кривой γ, третья координатная ось называется **бинормалью** кривой γ. Координатные плоскости канонической системы координат имеют следующие названия: плоскость параллельная векторам $\overline{\tau}, \overline{\nu}$ - **соприкасающаяся** плоскость, плоскость параллельная векторам $\overline{\tau}, \overline{\beta}$ - **спрямляющая** плоскость и плоскость параллельная векторам $\overline{\nu}, \overline{\beta}$ - **нормальная** плоскости.

Плоские кривые. Если кривая $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(s)$ принадлежит плоскости, то с каждой точкой кривой связан декартов базис, состоящий из двух векторов $\{\overline{\tau}(s), \overline{\nu}(s)\}$, где $\overline{\tau}(s)$ - касательный вектор $\overline{r}'(s)$, а $\overline{\nu}(s)$ - орт вектора кривизны кривой γ в точке M.

14.5 Формулы Френе гладкой кривой

Пусть $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(s)$ - гладкая кривая, $\{\overline{\tau}(s), \overline{\nu}(s), \overline{\beta}(s)\}$ - базис канонической системы координат в точке M кривой, соответствующей значению натурального параметра s.

Выведем формулы разложения производных вектор-функций $\overline{\tau}(s)$, $\overline{\nu}(s)$, $\overline{\beta}(s)$ по векторам базиса $\{\overline{\tau}(s), \overline{\nu}(s), \overline{\beta}(s)\}$ в точке s.

■ Так как $\overline{\tau}' = \overline{N}$, а $\overline{N} = k\overline{\nu}$, ($k$ - кривизна кривой в точке s), то

$$\overline{\tau}' = k\,\overline{\nu} \tag{1}$$

Так как $\overline{\nu}(s)$ - единичная вектор-функция, то $\overline{\nu}'(s) \perp \overline{\nu}(s)$ для всех s. Следовательно вектор $\overline{\nu}' = \overline{\nu}'(s)$ компланарен векторам $\overline{\tau}(s)$ и $\overline{\beta}(s)$. Поэтому можно записать

$$\overline{\nu}' = \alpha\overline{\tau} + \kappa\overline{\beta} \qquad (\text{"}\kappa\text{"} \ - \text{ каппа}) \tag{2}$$

Найдем α. Продифференцируем тождество $\overline{\tau}(s) \cdot \overline{\nu}(s) = 0$ по $s : \overline{\tau}' \cdot \overline{\nu} + \overline{\tau} \cdot \overline{\nu}' = 0$ и воспользуемся разложениями (1) и (2). Получим $k\overline{\nu} \cdot \overline{\nu} + \overline{\tau} \cdot (\alpha\overline{\tau} + \kappa\overline{\beta}) = 0$ или $k + \alpha = 0$. Поэтому $\alpha = -k$ и разложение (2) примет вид

$$\overline{\nu}' = -k\overline{\tau} + \kappa\overline{\beta} \tag{3}$$

Дифференцируем теперь вектор-функцию $\overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\nu}$ и воспользуемся разложениями (1) и (3):

$$\overline{\beta}' = \overline{\tau}' \times \overline{\nu} + \overline{\tau} \times \overline{\nu}' = (k\overline{\nu}) \times \overline{\nu} + \overline{\tau} \times (-k\overline{\tau} + \kappa\overline{\beta}) = \kappa\overline{\tau} \times \overline{\beta} = -\kappa\overline{\nu}.$$

Таким образом, получены следующие формулы, описывающие изменение базисных векторов при смещении вдоль кривой:

$$\overline{r}' = \overline{\tau},\ \ \overline{\tau}' = k\,\overline{\nu},\ \ \overline{\nu}' = -k\overline{\tau} + \kappa\overline{\beta},\ \ \overline{\beta}' = -\kappa\overline{\nu}.\ \blacksquare \qquad (4)$$

Эти формулы называются формулами Френе. Функция $k = k(s)$ названа кривизной, а функция $\kappa = \kappa(s)$ называется **кручением** кривой в точке s. Еще раз отметим, что формулы Френе теряют смысл в точке кривой с нулевой кривизной $k(s)$, так как в таких точках не существует канонической системы координат.

Следующая теорема показывает, насколько кривизна и кручение определяют кривую.

Теорема 14.2 *Пусть $f(s)$ и $g(s)$ - непрерывные функции, определенные на интервале (a, b), причем $f(s) > 0$. Существует гладкая кривая, у которой в точке, соответствующей длине дуги s, кривизна равна $f(s)$, а кручение $g(s)$. Такая кривая единственна с точностью до движения.*

Доказательство теоремы можно найти в [14].

Функции $k = k(s)$ и $\kappa = \kappa(s)$ называются **натуральными уравнениями** кривой. Решениями таких "уравнений" являются кривые, существование которых утверждается теоремой 15.2.

14.6 Примеры решений натуральных уравнений

Рассмотрим решения наиболее простых натуральных уравнений.

1. Найдем кривые, имеющие всюду нулевую кривизну. Пусть $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(s)$ такая кривая, s - натуральный параметр, $\overline{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$. Так как $k(s) = |\overline{N}(s)| = 0$ и $\overline{N}(s) = \overline{r}''(s)$, то и $\overline{r}''(s) =$ для всех s. Последнее равенство можно переписать так: $(x''(s), y''(s), z''(s)) = \overline{0}$ или $x''(s) = 0$, $y''(s) = 0$, $z''(s) = 0$. Дважды интегрируя, получим: $x(s) = a_1 s + b_1$, $y(s) = a_2 s + b_2$, $z(s) = a_3 s + b_3$, где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ - постоянные интегрирования. Видим, что любая точка кривой $(x(s), y(s), z(s))$ принадлежит прямой $l : x = a_1 s + b_1$, $y = a_2 s + b_2$, $z = a_3 s + b_3$ (1), следовательно либо $\gamma = l$, либо $\gamma \subset l$ - есть интервал числовой прямой.

Верно и обратное утверждение. Пусть прямая задана уравнениями (1) и выполняется равенство $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Тогда t - натуральный параметр. Таким образом, γ задана уравнением $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $\overline{r}(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2, a_3 t + b_3)$. Отсюда находим $\overline{r}' = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{r}'' = \overline{0}$. Поэтому $k(t) = 0$ для всех t.

2. Найдем кривые, имеющие всюду нулевое кручение. Пусть $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(s)$ такая кривая, s - натуральный параметр, $\overline{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$. Так как кручение равно нулю $\kappa(s) = 0$, то из последней формулы Френе $\overline{\beta}' = -\kappa\overline{\nu}$ следует, что $\overline{\beta}' = \overline{0}$ и, значит, $\overline{\beta} = \overline{\beta}(s)$ не зависит от s. Продифференцируем функцию $\overline{r}(s) \cdot \overline{\beta}(s)$ по s, получим: $(\overline{r}(s) \cdot \overline{\beta})' = \overline{r}'(s) \cdot \overline{\beta} + \overline{r}(s) \cdot \overline{\beta}' = \overline{r}'(s) \cdot \overline{\beta} = \overline{\tau}(s) \cdot \overline{\beta} = 0$ так как $\overline{\tau} \perp \overline{\beta}$ в каждой точке кривой. Следовательно $\overline{r}(s) \cdot \overline{\beta} = -D = const$. Если положить $\overline{\beta} = (A, B, C)$, то последнее равенство в координатах примет вид: $Ax(s) + By(s) + Cz(s) + D = 0$, что означает, что точка $(x(s), y(s), z(s))$ кривой γ принадлежит плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Таким образом γ - плоская кривая.

Верно и обратное утверждение: пусть $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(s)$ лежит в плоскости π, причем считаем, что кривизна $k(s) > 0$ всюду на γ. Пусть $\overline{n}$ - единичный нормальный вектор плоскости π, $\overline{r}_0$ - радиус-вектор некоторой точки плоскости π. Тогда $(\overline{r}(s) - \overline{r}_0) \perp \overline{n}$. Поэтому скалярное произведение $(\overline{r}(s) - \overline{r}_0) \cdot \overline{n} = 0$ для всех s. Дифференцируем это тождество дважды по $s : \overline{r}' \cdot \overline{n} = 0$, $\overline{r}'' \cdot \overline{n} = 0$. Отсюда и из формул Френе, получим $\overline{\tau} \cdot \overline{n} = 0$, $k\overline{\nu} \cdot \overline{n} = 0$. Так как кривизна $k > 0$, то $\overline{\tau} \perp \overline{n} = \overline{0}$, $\overline{\nu} \perp \overline{n} = \overline{0}$, следовательно $\overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\nu} || \overline{n}$. Отсюда, учитывая, что $\overline{\beta}(s)$ - непрерывная единичная вектор-функция, заключаем, что либо $\overline{\beta} = \overline{n}$, либо $\overline{\beta} = -\overline{n}$. Считаем для определенности, что $\overline{\beta} = \overline{n}$ и делаем вывод, что $\overline{\beta}(s)$ не зависит от s. Поэтому $\overline{\beta}'(s) = \overline{0}$, а из последней формулы Френе $\overline{\beta}'(s) = -\kappa\overline{\nu}$ получим, что $\kappa = 0$ для всех s. Таким образом, кручение есть мера, показывающая насколько кривая не является плоской.

3. Плоские кривые с заданной кривизной. Пусть γ - гладкая кривая, лежащая в координатной плоскости XOY. Тогда γ можно задать уравнением $\overline{r} = \overline{r}(s)$, $\overline{r}(s) = (x(s), y(s))$, s - натуральный параметр. Допустим, что кривизна кривой γ, как функция параметра s, задана и имеет, например, такой вид $k(s) = \frac{1}{a}$, где $a = const$. Выясним, что представляет собой кривая γ.

Касательный вектор кривой $\overline{\tau}(s) = (x'(s), y'(s))$ - единичный, то есть $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$. Поэтому существует функция $\varphi(s)$ такая, что $x'(s) = \cos\varphi(s)$, $y'(s) = \sin\varphi(s)$. Тогда $\overline{\tau} = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$. Отсюда находим $\overline{\tau}' = \varphi'(s)(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))$. Сравнивая со второй формулой Френе $\overline{\tau}' = k\overline{\nu}$, получим следующее равенство $k\overline{\nu} = \varphi'(s)(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))$. Видим, что $\varphi'(s) \neq 0$ для всех s. Для определенности можно считать, что $\varphi'(s) > 0$, в противном случае сделаем замену $s \to -s$. Далее, $|k\overline{\nu}| = |\varphi'(s)(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s)|$ или $k = \varphi'(s)$. У нас $k(s) = \frac{1}{a}$, поэтому $\varphi(s) = \int \frac{1}{a} ds = \frac{s}{a} + C$. Тогда $x'(s) = \cos(\frac{s}{a} + C)$, $y'(s) = \sin(\frac{s}{a} + C)$. Интегрируя, получим $x(s) = \int \cos(\frac{s}{a} + C) ds = a\sin(\frac{s}{a} + C) + C_1$, аналогично $y(s) = -a\cos(\frac{s}{a} + C) + C_2$. Так как $(x(s) - C_1)^2 + (y(s) - C_2)^2 = a^2$, то кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = a\sin(\frac{s}{a} + C) + C_1$, $y = -a\cos(\frac{s}{a} + C) + C_2$. принадлежит окружности радиуса a.

14.7 Вычислительные формулы для кривизны и кручения кривой в случае произвольной параметризации

Пусть кривая γ задана уравнением $\overline{r} = \overline{r}(t)$ и t - не обязательно натуральный параметр. Найдем кривизну и кручение такой кривой, а также получим формулы для нахождения базисных векторов канонической системы координат.

Пусть $\overline{r} = \overline{r}_1(s)$ - естественная параметризация кривой γ, $s = s(t)$, (см. §15.3). Ясно, что $\overline{r}_1(s(t)) = \overline{r}(t)$. Отсюда получаем $\frac{d\overline{r}(t)}{dt} = \frac{d\overline{r}_1}{ds}\frac{ds}{dt}$. Из второй формулы Френе $\frac{d\overline{r}_1}{ds} = \overline{\tau}$, поэтому

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\tau}\frac{ds}{dt} \tag{1}$$

Так как (§15.3, формула (2)) $\frac{ds}{dt} = |\frac{d\overline{r}}{dt}|$, то $\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\tau}|\frac{d\overline{r}}{dt}|$ или

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{dt} / |\frac{d\overline{r}}{dt}| \tag{2}$$

Дифференцируем (1) по $t : \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \frac{d\overline{\tau}}{ds}(\frac{ds}{dt})^2 + \overline{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}$. Из формул Френе $\frac{d\overline{\tau}}{ds} = k\overline{\nu}$, поэтому

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = k\overline{\nu}(\frac{ds}{dt})^2 + \overline{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} \tag{3}$$

Заметим, что, вообще говоря, кривизна $k \neq |\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}|$, но, если t - натуральный параметр $t = s$, то $\frac{dt}{ds} = 1$, $\frac{d^2t}{ds^2} = 0$ и из (3): $k = |\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}|$.

Из (1) и (3):

$$\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = (\overline{\tau} \times k\overline{\nu})(\frac{ds}{dt})^3 = k\overline{\beta}(\frac{ds}{dt})^3 = k\overline{\beta}|\frac{d\overline{r}}{dt}|^3 \tag{4}$$

Так как $k > 0$, то $\overline{\beta} \uparrow\uparrow \frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ следовательно:

$$\overline{\beta} = \frac{\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}}{|\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}|}, \quad a \quad \overline{\nu} = \overline{\beta} \times \overline{\tau}.$$

Найдем теперь модуль векторного произведения (4) и учитывая, что $|\overline{\beta}| = 1$, получим формулу для вычисления кривизны:

$$k = \frac{|\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}|}{|\frac{d\overline{r}}{dt}|^3} \tag{5}$$

Найдем кручение κ. Продифференцируем (3), записывая скобками коэффициенты, не содержащие кручение κ :

$$\frac{d^3\overline{r}}{dt^3} = (\quad)\overline{\nu} + k\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2(-k\overline{\tau} + \kappa\overline{\beta})\frac{ds}{dt} = (\quad)\overline{\tau} + (\quad)\overline{\nu} + k\kappa\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^3\overline{\beta}$$

Поэтому

$$\Big(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\Big) \cdot \frac{d^3\overline{r}}{dt^3} = k^2\kappa\Big|\frac{d\overline{r}}{dt}\Big|^3\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^3 = k^2\kappa\Big|\frac{d\overline{r}}{dt}\Big|^6$$

Заменяя k по формуле (5), окончательно получим:

$$\kappa = \frac{(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}) \cdot \frac{d^3\overline{r}}{dt^3}}{|\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}|^2} \tag{6}$$

Заметим, что в числителе стоит смешанное произведение векторов.

Пример. Найти кривизну и кручение винтовой линии $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(t)$, где $\overline{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t)$, $a > 0$, $b > 0$. Найти векторы базиса Френе винтовой линии.

Находим производные данной вектор-функции: $\overline{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$, $\overline{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$, длину вектора $|\overline{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$, векторное произведение

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2),$$

смешанное произведение $(\overline{r}' \times \overline{r}'') \cdot \overline{r}''' = a^2b\sin^2 t + a^2b\cos^2 t = a^2b$ и длину векторного произведения $|\overline{r}' \times \overline{r}''| = \sqrt{a^2b^2 + a^4}$. Отсюда:

$$k = \frac{a\sqrt{b^2 + a^2}}{(\sqrt{b^2 + a^2})^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \kappa = \frac{a^2b}{a^2(b^2 + a^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Кроме того,

$$\overline{\tau} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}}(-a\sin t, a\cos t, b), \quad \overline{\beta} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}}(b\sin t, -b\cos t, a),$$

а

$$\overline{\nu} = \overline{\beta} \times \overline{\tau} = \frac{1}{b^2 + a^2} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ b\sin t & -b\cos t & a \end{vmatrix} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

- базисные векторы канонической системы координат.

Решим этот пример в системе Mathematica. Введем функцию, вычисляющую длину вектора.

In[1]:= $\mathbf{nr}[\mathbf{t\_}] = \mathbf{Sqrt}[\mathbf{t}.\mathbf{t}];$

Введем вектор функцию:

In[2]:= $\mathbf{r}[\mathbf{t\_}] = \{\mathbf{a}\ \mathbf{Cos}[\mathbf{t}], \mathbf{a}\ \mathbf{Sin}[\mathbf{t}], \mathbf{b}\ \mathbf{t}\};$

Кривизну кривой вычислим по формуле (5):

In[3]:= $\mathbf{k} = \mathbf{FullSimplify}[\mathbf{nr}[\mathbf{r}'[\mathbf{t}] \times \mathbf{r}''[\mathbf{t}]]/\mathbf{nr}[\mathbf{r}'[\mathbf{t}]]^{\mathbf{3}}, \mathbf{a} > \mathbf{0}\&\&\mathbf{b} > \mathbf{0}]$

Out[3]= $\frac{a}{a^2+b^2}$

Кручение вычислим по формуле (6):

In[4]:= $\kappa = \mathbf{FullSimplify}[\mathbf{Det}[\{\mathbf{r}'[\mathbf{t}], \mathbf{r}''[\mathbf{t}], \mathbf{r}'''[\mathbf{t}]\}]/\mathbf{nr}[\mathbf{r}'[\mathbf{t}] \times \mathbf{r}''[\mathbf{t}]]^{\mathbf{2}},$
$\mathbf{a} > \mathbf{0}\&\&\mathbf{b} > \mathbf{0}]$

Out[4]= $\frac{b}{a^2+b^2}$

Находим векторы базиса Френе:

In[5]:= $\tau = \mathbf{FullSimplify}[\mathbf{r}'[\mathbf{t}]/\mathbf{nr}[\mathbf{r}'[\mathbf{t}]], \mathbf{a} > \mathbf{0}\&\&\mathbf{b} > \mathbf{0}]$

Out[5]= $\{-\frac{a\sin(t)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a\cos(t)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\}$

In[6]:= $\beta = \mathbf{FullSimplify}[\mathbf{r}'[\mathbf{t}] \times \mathbf{r}''[\mathbf{t}]/\mathbf{nr}[\mathbf{r}'[\mathbf{t}] \times \mathbf{r}''[\mathbf{t}]], \mathbf{a} > \mathbf{0}\&\&\mathbf{b} > \mathbf{0}]$

Out[6]= $\{\frac{b\sin(t)}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b\cos(t)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\}$

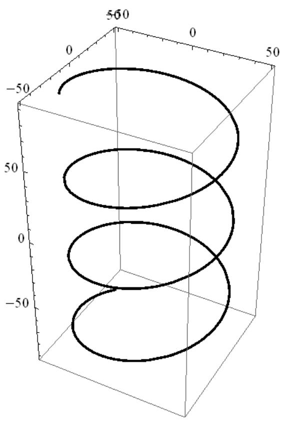
In[7]:= $\nu = \mathbf{FullSimplify}[\beta \times \tau, \mathbf{a} > \mathbf{0}\&\&\mathbf{b} > \mathbf{0}]$

Out[7]= $\{-\cos(t), -\sin(t), 0\}$

Построим кривую. Для этого очистим переменную t и зададим параметры кривой.

In[8]:= $\mathbf{Clear}[\mathbf{t}]; \mathbf{a} = \mathbf{50}; \mathbf{b} = \mathbf{5}; \mathbf{ParametricPlot3D}[\mathbf{r}[\mathbf{t}], \{\mathbf{t}, -\mathbf{10}, \mathbf{10}\}]$

Out[8]=



Задачи. 1). Найти все кривые, имеющие постоянную кривизну и кручение.

2). Найти кривизну и кручение кривой, заданной следующей системой уравнений $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$.

15 Теория поверхностей

15.1 Понятие поверхности

Зафиксируем в пространстве декартову систему координат $R = (O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, а в некоторой плоскости E^2 декартову систему координат UOV, координаты точек в которой будем обозначать (u, v). Пусть $G \subset E^2$ - открытое множество, скажем, открытый прямоугольник: $G = \{(u, v) | a < u, v < b\}$.

Подмножество F пространства, заданное уравнениями вида

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{1}$$

$(u, v) \in G$, называется гладкой элементарной поверхностью, если функции в (1) - гладкие функции переменных u и v на G и

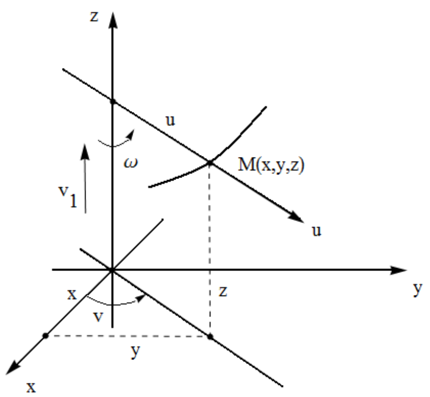
$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2 \tag{2}$$

для всех $(u, v) \in G$. Здесь $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \ldots$ - частные производные функций в (1) по u и v. Под словами "множество F задано уравнениями (1)" понимаем, что для любых $(u, v) \in G$, точка с координатами (1) принадлежит F и для любой точки $M(x, y, z) \in F$ найдется единственная пара $(u, v) \in G$ такая, что x, y, z, u, v удовлетворяют уравнениям (1).

Уравнения (1) вместе с условиями (2) (условия **регулярности**) называются **параметрическими уравнениями** поверхности или **параметризацией;** при этом будем говорить, что поверхность F задана уравнениями (1). Значения переменных (u, v) называются **криволинейными координатами** или **параметрами** точки поверхности $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in F$. Обозначение $M(u, v)$ говорит, что точка M принадлежит поверхности и имеет криволинейные координаты u, v.

Примеры. 1). Пусть F - координатная плоскость XOY, $G = E^2$. Тогда F можно задать уравнениями вида $x = u$, $y = v$, $z = 0$, $(u, v) \in G$. Так как $x(u, v) = u$, $y(u, v) = v$, $z(u, v) = 0$ - гладкие функции по переменным u, v и условие (2) выполняется: $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$, то плоскость F - гладкая элементарная поверхность.

2). Возьмем координатную ось U, совпадающую с осью X-ов, и начнем ее вращать около оси Z с угловой скоростью ω и одновременно перемещать ее вдоль оси Z со скоростью v_1. Пусть F - множество точек всех таких прямых - положений оси U. Такое множество называется **геликоидом вращения** или просто **геликоидом**. Пусть $M \in F$ - произвольная точка геликоида. Если τ - время, а u - координата точки M на оси U, то для координат точки $M \in F$ можно записать: $x = u\cos(\omega\tau)$, $y = u\sin(\omega\tau)$, $z = v_1\tau$. Обычно делают замену $\omega\tau = v$, $\frac{v_1}{\omega} = a$:



$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av \tag{3}$$

и считают, что $-\infty < u, v < \infty$, $a = const$. Функции в (3) - гладкие функции по u и v и

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{pmatrix} = 2$$

для всех u, v. Таким образом, геликоид - гладкая поверхность.

Подмножество F пространства называется **простой** поверхностью, если для любой точки $M \in F$ найдется открытый шар B с центром в точке M, такой, что $F \cap B$ - гладкая элементарная поверхность.

К простым поверхностям относятся эллипсоиды, гиперболоиды, торы и многие другие подмножества пространства.

В дальнейшем под поверхностью будем понимать простую поверхность.

Пример. Параметрические уравнения сферы с центром в начале координат и радиуса r. Пусть u, v - широта и долгота точки $M(x, y, z)$ сферы. Тогда $x = r\cos u \cos v$, $x = r\cos u \sin v$, $x = r\sin u$ - регулярная параметризация сферы (§7.1).

Векторное уравнение поверхности. Пусть поверхность задана уравнениями (1). Обозначим через $\overline{r} = (x, y, z)$, $\overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ - радиус векторы точек (x, y, z) и $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Тогда три уравнения (1) равносильны одному векторному уравнению $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, а условия (2) будут означать, что $\overline{r}_u \nparallel \overline{r}_v$ или, что тоже самое, векторное произведение $\overline{r}_u \times \overline{r}_v \neq 0$, $\overline{r}_u = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))$, $\overline{r}_v = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$.

Таким образом, подмножество F пространства есть гладкая поверхность, если F можно задать векторным уравнением $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, где $\overline{r}(u, v)$ - гладкая вектор-функция и $\overline{r}_u \times \overline{r}_v \neq\ 0$.

Неявное задание поверхности. Пусть множество F задано уравнением вида $G(x, y, z) = 0$, причем $G(x, y, z)$ - гладкая функция переменных x, y, z и производные G_x, G_y, G_z не обращаются одновременно в ноль на F. Утверждается, что, при выполнении этих условий, F - простая поверхность.

■ Действительно, пусть точка $M \in F$ и для определенности считаем, что $G_z \neq 0$. По теореме о неявных функциях существует открытый шар B с центром в M и гладкая функция $z(x, y)$ такие, что множество $F \cap B$ задается уравнением $z = z(x, y)$. Полагая $x = u$, $y = v$, $z = z(u, v)$, получим параметризацию $F \cap B$, следовательно, $F \cap B$ - гладкая элементарная поверхность. ■

Заметим, что, если поверхность F задана уравнениями (1), причем условия (2) выполняются, то F допускает неявное задание в окрестности любой своей точки. ■ Действительно, если в точке M условие (2) достигается неравенством $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$, то по теореме об обратной функции первые два уравнения (1) можно разрешить относительно u, v в некоторой окрестности B точки $M : u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Совершим такую замену в третьем уравнении (1): $z - z(u(x, y), v(x, y)) = 0$. Обозначим функцию слева через $G(x, y, z)$, и получим, что $B \cap F$ задано уравнением вида $G(x, y, z) = 0$. При этом, $G(x, y, z)$ - гладкая функция, что следует из теоремы об обратной функции и $G_z = 1 \neq 0$.

Пример. Пусть F - сфера: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ и $M(0, 0, 1) \in F$. Функция $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ - гладкая, $G_x = 2x$, $G_y = 2y$, $G_z = 2z$. В точке $M : G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = 2$. Следовательно, существует шар B с центром в точке M такой, что $F \cap B$ - элементарная гладкая поверхность, сама сфера F - простая поверхность.

15.2 Кривые на поверхности

Пусть F - поверхность, заданная уравнением $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$. Задать на поверхности F гладкую кривую - значит задать гладкую кривую в области параметров

G. Кривую в G можно задать параметрическими уравнениями или неявно.

■ Действительно, пусть $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in (a, b)$, есть гладкая кривая в области G. Пусть $\gamma \subset F$ - множество всех точек поверхности с криволинейными координатами $(u(t), v(t))$, $t \in (a, b)$. Покажем, что γ - гладкая кривая. Возьмем векторное уравнение $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(u(t), v(t))$. Обозначим через $\overline{r}_1(t) = \overline{r}(u(t), v(t))$ и найдем $\overline{r}'_1(t)$. Введем координатные функции вектор-функция: $\overline{r}_1(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$. Тогда $\overline{r}'_1(t) = (x_u u' + x_v v', y_u u' + y_v v', z_u u' + z_v v') = (x_u, y_u, z_u)u' + (x'_v, y_v z_v)v' = \overline{r}_u u' + \overline{r}_v v'$. Таким образом,

$$\overline{r}'_1(t) = \overline{r}_u u' + \overline{r}_v v' \tag{1}$$

и $\overline{r}'_1(t) \neq 0$, так как u', v' не равны нулю одновременно. Кроме того, $\overline{r}'_1(t)$ - гладкая вектор-функция, как композиция гладких функций. Поэтому $\gamma \subset F$ - гладкая кривая по определению. ■

Из (1) также следует, что $(u'(t), v'(t))$ (или (du, dv)) есть координаты вектора касательного к кривой $\gamma : u = u(t)$, $v = v(t)$ в базисе $\{\overline{r}_u, \overline{r}_v\}$. Далее увидим, что этот базис есть базис векторов касательной плоскости к поверхности в точке с криволинейными координатами $(u(t), v(t))$.

Примеры. 1. Найдем касательный вектор к кривой $\gamma : u = t^2 - 3$, $v = t + 1$, лежащей на геликоиде, в точке $t = -1$. Здесь $u(t) = t^2 - 3$, $v(t) = t + 1$. Подставим эти функции в (3) §16.1 и получим векторное уравнение кривой: $\overline{r} = \overline{r}_1(t)$, где $\overline{r}_1(t) = ((t^2-3)\cos(t+1), (t^2-3)\sin(t+1), a(t+1))$. Поэтому $\overline{r}'_1(t) = (2t\cos(t+1) - (t^2-3)\sin(t+1), 2t\sin(t+1) + (t^2-3)\cos(t+1), a)$, а $\overline{r}'_1(-1) = (2, -2, a)$ - искомый касательный вектор.

2. Напишем векторное уравнение кривой γ, принадлежащей поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$ и заданной неявным уравнением в области параметров: $u - 2v^3 = 0$. Перейдем к параметрическому заданию этой кривой, положим $v = t$, тогда $u = 2t^3$. Таким образом γ задана параметрическими уравнениями: $u = 2t^3$, $v = t$, а $\overline{r} = \overline{r}(2t^3, t)$ - ее векторное уравнение.

Рассмотрим частные случаи. Кривые на поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, заданные уравнениями $\gamma : u = t$, $v = C$, и $\gamma_1 : u = C_1$, $v = \tau$, где C, C_1 - постоянные, называются **координатными линиями** или **u-линиями и v-линиями** или **линиями** $v = const$ **и** $u = const$ соответственно. Изменяя постоянные C, C_1, можно получить много кривых из каждого семейства координатных линий. Точнее: через каждую точку поверхности проходит по одной координатной линии из каждого семейства. Например, через точку (u_0, v_0) проходит одна линия $v = v_0$ и одна линия $u = u_0$. Кривые одного семейства, например, $u = const$ не пересекаются.

Напишем векторные уравнения координатных линий - подставим $u = t$, $v = C$ в уравнение поверхности и получим уравнение первого семейства координатных линий $\gamma_C : \overline{r} = \overline{r}(t, C)$, аналогично получаем второе семейство координатных линий и $\gamma_{C_1} : \overline{r} = \overline{r}(C_1, \tau)$. Найдем касательные векторы к $\gamma_C : \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{r}_u$ и к $\gamma_{C_1} : \frac{d\overline{r}_1}{d\tau} = \overline{r}_v$. Поэтому условие $\overline{r}_u \times \overline{r}_v \neq \overline{0}$ в определении гладкой поверхности означает, что касательные векторы в этих точках не параллельны, то есть координатные линии в точке их пересечения не касаются.

Для сферы, заданной параметрическими уравнениями (пример §16.1), координатными линиями будут параллели ($u = const$) и меридианы ($v = const$) сферы.

Замечание. Семейство линий на поверхности часто бывает заданным, так называемым, дифференциальным уравнением относительно функций $u(t)$, $v(t)$, задающих кривые семейства. Например, семейство линий $\varphi(u,v)=C$ можно задать уравнением вида

$$A_1(u,v)du + B_1(u,v)dv = 0. \tag{2}$$

Действительно, считаем, что $u=u(t)$, $v=v(t)$ - параметризация линии этого семейства. Тогда $\varphi(u(t),v(t))=0$ для всех t. Дифференцируя по t и, вводя новые обозначения для производных функции $\varphi(u,v)$, получим дифференциальное уравнение (2). Если задано еще одно семейство линий на поверхности

$$A_2(u,v)du + B_2(u,v)dv = 0 \tag{3}$$

то, перемножая части уравнений (2) и (3), получим уравнение

$$A(u,v)du^2 + 2B(u,v)dudv + C(u,v)dv^2 = 0 \tag{4}$$

и, тем самым, объединим два уравнения (2) и (3) в одно (4).

Верно и обратное утверждение при условии, что $B^2 - AC > 0$. В этом случае уравнение (4) равносильно двум линейным уравнениям вида (2), (3).

Примеры. 1). Дифференциальное уравнение $2udu - dv = 0$ задает на некоторой поверхности F семейство линий $u^2 - v = C$, где C - произвольная константа. Для получения уравнения семейства достаточно проинтегрировать данное дифференциальное уравнение.

Кривая $u^2 - v = 0$ ($C=0$) принадлежит этому семейству линий на поверхности и проходит через точку $(0,0)$. Поэтому кривую на поверхности (например, $u^2 - v = 0$) можно задать дифференциальным уравнением ($2udu - dv = 0$) и **начальным условием** - кривая, принадлежащая семейству, должна проходить через данную точку $(0,0)$.

2). Найти все линии на поверхности F, заданные дифференциальным уравнением $du^2 - 2ududv + (u^2 - a^2)dv^2 = 0$, $u > a > 0$. Это уравнение равносильно двум линейным дифференциальным уравнениям вида (2), (3). Действительно, перепишем его так: $\frac{du^2}{dv^2} - 2u\frac{du}{dv} + (u^2 - a^2) = 0$ и разрешим относительно $\frac{du}{dv}$: $\frac{du}{dv} = u + a$, $\frac{du}{dv} = u - a$. Проинтегрируем каждое из дифференциальных уравнений. Для этого **разделим переменные**, то есть соберем в каждом уравнений в одну часть все, что содержит первую переменную, в другую часть - все со второй переменной и (если это возможно) проинтегрируем: $\ln(u+a) = v + C$, $\ln(u-a) = v + C$. Получили два семейства линий на поверхности F.

Задача. Пусть плоскость π касается тора F в двух точках. Показать, что множество $\pi \cap F$ состоит из двух окружностей.

15.3 Допустимая замена параметров

Пусть поверхность F задана уравнением $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in G$. Покажем, что поверхность F допускает бесчисленное множество гладких параметризаций. ■ Сначала напомним одно определение из анализа. Пусть G_1 еще один открытый прямоугольник (открытая область) плоскости параметров UOV. Биективное отображение $G_1 \to G$, заданное формулами вида $u = u(u_1, v_1)$, $v = v(u_1, v_1)$ (1), называется **диффеоморфизмом**, если $u(u_1,v_1)$, $v(u_1,v_1)$ - гладкие функции на G_1 и

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

для всех $(u_1, v_1) \in G_1$. Сделаем замену переменных по формулам (1) в вектор-функции, задающей поверхность, получим векторное уравнение вида $\overline{r} = \overline{r}_1(u_1, v_1)$, где $\overline{r}_1(u_1, v_1) = \overline{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1))$, которое является еще одной гладкой параметризацией поверхности F. Это следует из того, что $\overline{r}_1(u_1, v_1)$ - гладкая функция как композиция гладких функций и выполняется условие $\overline{r}_{1u_1} \times \overline{r}_{1v_1} \neq 0$ в силу (2). ■ Подобную замену параметров называют **допустимой.**

При исследовании поверхностей часто вводят специальные параметризации, например, параметризуют поверхность так, чтобы два данных семейства линий на поверхности были координатными линиями. Следующая лемма поясняет как ввести такую параметризацию.

Лемма 15.1 *Пусть дана поверхность* $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$ *и два семейства гладких линий на* $F : \varphi(u, v) = C$, $\psi(u, v) = C_1$, *таких, что*

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

на G. *Тогда уравнения* $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ *разрешимы относительно* u, v *и решения* $u = u(u_1, v_1)$, $v = v(u_1, v_1)$ *есть допустимая замена параметров, такая, что в новых переменных координатными линиями* $u_1 = C$, $v_1 = C_1$ *становятся линиями* $\varphi(u, v) = C$, $\psi(u, v) = C_1$.

■ По теореме об обратной функции уравнения $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$, в силу условия (3), разрешимы относительно u, v :

$$u = u(u_1, v_1), \qquad v = v(u_1, v_1) \tag{4}$$

Здесь u_1, v_1 принадлежат открытой области G_1 (без доказательства), причем G_1 может быть более сложным множеством, чем прямоугольник. При этом:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{vmatrix} \neq 0$$

для всех (u_1, v_1). Следовательно замена (4) есть допустимая замена параметров. Совершим такую замену, получим, что поверхность F задана новым уравнением $\overline{r} = \overline{r}_1(u_1, v_1)$, где $\overline{r}_1(u_1, v_1) = \overline{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1))$. В новой параметризации поверхности координатная линия $u_1 = const$ - это множество всех точек (u, v) таких, что $\varphi(u, v) = const$, то есть линия первого семейства, а линия $v_1 = const$ - есть линии второго семейства $\psi(u, v) = const$, что и требовалось доказать. ■

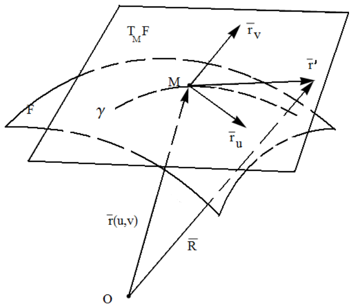
15.4 Касательная плоскость

Касательной плоскостью к поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$ в точке $M \in F$ называется плоскость, проходящая через точку M параллельно векторам $\overline{r}_u$ и $\overline{r}_v$ в точке M. Обозначается касательная плоскость $T_M F$.

В каждой точке гладкой поверхности $\overline{r}_u \nparallel \overline{r}_v$, поэтому касательная плоскость существует везде на F.

Прямая, проходящая через точку $M \in F$ перпендикулярно касательной плоскости $T_M F$, называется **нормалью.**

Геометрическая характеристика касательной плоскости. Пусть $\gamma : u = u(t)$, $v = v(t)$ - гладкая кривая на поверхности F, проходящая через точку M. Утвер-



ждается, что касательная к кривой γ в точке M лежит в касательной плоскости $T_M F$.

■ Действительно, напишем векторное уравнение кривой $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(u(t), v(t))$ и найдем касательный вектор $\overline{r}' = \overline{r}_u u'(t) + \overline{r}_v v'(t)$. Так как вектор $\overline{r}'$ разлагается по векторам $\overline{r}_u$ и $\overline{r}_v$ то касательная к γ в точке M лежит в касательной плоскости $T_M F$. Верно и обратное утверждение: для любого вектора $\overline{p}$ с координатами (α, β) в базисе $\{\overline{r}_u, \overline{r}_v\}$ касательной плоскости $T_M F$ найдется кривая на поверхности F, касательный вектор к которой в точке M есть вектор $\overline{p}$. Такой кривой является, например, кривая $\gamma : u = u_0 + \alpha t,\ v = v_0 + \beta t$, где (u_0, v_0) - криволинейные координаты точки M. Запишем векторное уравнение этой кривой: $\overline{r} = \overline{r}(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta t)$ и найдем касательный вектор $\overline{r}' = \overline{r}_u \alpha + \overline{r}_v \beta = \overline{p}$. ■

Таким образом, касательная плоскость $T_M F$ проходит через все касательные к кривым на поверхности F в точке M и следовательно не зависит от параметризации поверхности.

Уравнение касательной плоскости к поверхности F, заданной векторным уравнением $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $\overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

■ Напишем уравнение касательной плоскости к поверхности F в точке M с криволинейными координатами (u, v). Так как касательная плоскость проходит через точку $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ параллельно векторам $\overline{r}_u = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))$, $\overline{r}_v = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$, то, применяя уравнение (2) §7.2, получим уравнение касательной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x(u,v) & y - y(u,v) & z - z(u,v) \\ x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix} = 0. \quad ■ \tag{1}$$

Заметим, что если точка $M \notin F$, то уравнение (1) не будет, вообще говоря, уравнением касательной плоскости к поверхности F.

Пример. Напишем уравнение касательной плоскости к геликоиду $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $\overline{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ в точке $M(1, \frac{\pi}{2})$. Найдем базисные векторы касательной плоскости $\overline{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\overline{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, a)$; в точке $M : \overline{r}_u = (0, 1, 0)$, $\overline{r}_v = (-1, 0, a)$. Напишем уравнение (1):

$$\begin{vmatrix} x - x(u,v) & y - y(u,v) & z - z(u,v) \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0$$

или: $ax + z - \frac{\pi a}{2} = 0$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности F, заданной неявно.

Пусть поверхность F задана уравнением $G(x, y, z) = 0$. Пусть точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности F. Напишем уравнение касательной плоскости $T_M F$.

■ В окрестности точки M поверхности F допускает задание параметрическими уравнениями $u = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Поэтому в такой окрестности выполняется равенство $G(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$ тождественно по u и v. Продифференцируем последнее равенство по u, затем по v :

$$G_x x_u + G_y y_u + G_z z_u = 0, \quad G_x x_v + G_y y_v + G_z z_v = 0. \tag{2}$$

Обозначим через $\overline{N} = (G_x, G_y, G_z)$. Если $\overline{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\overline{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, то (2) можно переписать в виде $\overline{N} \cdot \overline{r}_u = 0$, $\overline{N} \cdot \overline{r}_v = 0$. Последнее означает, что $\overline{N} \perp \overline{r}_u = 0$, $\overline{N} \perp \overline{r}_v = 0$ или $\overline{N} || \overline{r}_u \times \overline{r}_v$, следовательно $\overline{N}$ - нормальный вектор к $T_M F$, поэтому (§7.2)

$$T_M F: \; G_x(x - x_0) + G_y(y - y_0) + G_z(z - z_0) = 0$$

- уравнение искомой касательной плоскости. Здесь частные производные вычисляются в точке M. ■

Пример. Найдем касательную плоскость к поверхности $F : x^3 z - y^2 + y = 0$ в точке $M(0, 1, 1) \in F$. Если $G(x, y, z) = x^3 z - y^2 + y$, то $G_x = 3x^2 z$, $G_y = -2y + 1$, $G_z = x^3$, а в точке $M : G_x = 0$, $G_y = -1$, $G_z = 0$, поэтому $T_M F : 0(x - 0) - 1(y - 1) + 0(z - 0) = 0$ или $Y = 1$.

15.5 Первая квадратичная форма поверхности

Пусть поверхность F задана векторным уравнением $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$. Вектор $d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv$ называется **дифференциалом вектор-функции** $\overline{r}(u, v)$. Дифференциалы независимых переменных du, dv есть координаты $d\overline{r}$ в базисе $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$ касательной плоскости $T_M F$. В частности, если du, dv - дифференциалы функций, задающих кривую на поверхности F, то du, dv являются и координатами касательного вектора кривой.

Первой квадратичной формой поверхности F называется скалярный квадрат дифференциала $d\overline{r}$ и обозначается $I = (d\overline{r})^2$.

Так как $(d\overline{r})^2 = (\overline{r}_u du + \overline{r}_v dv)^2 = (\overline{r}_u \cdot \overline{r}_u) du^2 + 2(\overline{r}_u \cdot \overline{r}_v) du dv + (\overline{r}_v \cdot \overline{r}_v) dv^2$, то, обозначив $E = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_u$, $F = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v$, $G = \overline{r}_v \cdot \overline{r}_v$, получим, что

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Так, для геликоида $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2 + a^2$ и поэтому

$$I = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2.$$

Приложения первой квадратичной формы.

1. **Длина дуги кривой на поверхности.** Рассмотрим на поверхности F дугу $a < t < b$ кривой $\gamma : u = u(t)$, $v = v(t)$. Запишем векторное уравнение дуги $\overline{r} = \overline{r}(u(t), v(t))$, $a < t < b$, и воспользуемся результатами §15.3 для нахождения длины дуги: $s = \int_a^b |\overline{r}'(t)| dt$. Так как $\overline{r}' = \overline{r}_u u' + \overline{r}_v v'$, то $s = \int_a^b |\overline{r}_u u' + \overline{r}_v v'| dt = \int_a^b \sqrt{(\overline{r}_u \cdot \overline{r}_u) u'^2 + 2(\overline{r}_u \cdot \overline{r}_v) u' v' + (\overline{r}_v \cdot \overline{r}_u) v'^2} dt$. Таким образам:

$$s = \int_a^b \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} dt.$$

Формально последнюю формулу можно записать в следующем виде:

$$s = \int \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

или $s = \int \sqrt{I}$ или $ds^2 = I$.

2. **Площадь области на поверхности** $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$. Пусть $\omega \subset G$ - область. Интеграл

$$\sigma = \int_{\omega} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

называется **площадью области** поверхности F, заданной уравнением $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in \omega$.

3. **Угол между кривыми на поверхности** - это угол между касательными векторами к этим кривым в точке их пересечения. Пусть кривые $\gamma : u = u(t)$, $v = v(t)$ и $\gamma_1 : u = u_1(\tau)$, $v = v_1(\tau)$, лежащие на поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, пересекаются в точке $M_0(u_0, v_0)$. Пусть точке M_0 на γ соответствует значение параметра $t_0 : u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, на γ_1 - $\tau_0 : u_0 = u_1(\tau_0)$, $v_0 = v_1(\tau_0)$. Обозначим через θ угол между этими кривыми в точке M_0 и найдем $\cos\theta$. ■ Запишем векторные уравнения этих кривых - $\gamma : \overline{r} = \overline{r}(t)$, где $\overline{r}(t) = \overline{r}(u(t), v(t))$; $\gamma_1 : \overline{r} = \overline{r}_1(\tau)$, где $\overline{r}_1(\tau) = \overline{r}(u_1(\tau), v_1(\tau))$. Найдем касательные векторы к $\gamma : \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{r}_u \frac{du}{dt} + \overline{r}_v \frac{dv}{dt}$ и к $\gamma_1 : \frac{d\overline{r}_1}{d\tau} = \overline{r}_u \frac{du_1}{d\tau} + \overline{r}_v \frac{dv_1}{d\tau}$. Тогда

$$\cos\theta = \frac{\frac{d\overline{r}}{dt} \cdot \frac{d\overline{r}_1}{d\tau}}{|\frac{d\overline{r}}{dt}||\frac{d\overline{r}_1}{d\tau}|} = \frac{(\overline{r}_u \frac{du}{dt} + \overline{r}_v \frac{dv}{dt}) \cdot (\overline{r}_u \frac{du_1}{d\tau} + \overline{r}_v \frac{dv_1}{d\tau})}{|\overline{r}_u \frac{du}{dt} + \overline{r}_v \frac{dv}{dt}||\overline{r}_u \frac{du_1}{d\tau} + \overline{r}_v \frac{dv_1}{d\tau}|}$$

или

$$\cos\theta = \frac{E \frac{du}{dt} \frac{du_1}{d\tau} + F(\frac{du}{dt} \frac{dv_1}{d\tau} + \frac{dv}{dt} \frac{du_1}{d\tau}) + G \frac{du_1}{d\tau} \frac{dv_1}{d\tau}}{\sqrt{E(\frac{du}{dt})^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2} \sqrt{E(\frac{du_1}{d\tau})^2 + 2F \frac{du_1}{d\tau} \frac{dv_1}{d\tau} + + G(\frac{dv_1}{d\tau})^2}}. \ ■ \qquad (1)$$

Здесь функция E, F, G вычислены в точке $M_0(u_0, v_0)$, а производные соответственно в t_0 и τ_0.

Формулу (1) часто применяют в следующем виде. Обозначим через du, dv - дифференциалы функций $u(t)$, $v(t)$, задающих первую кривую, через δu, δv - дифференциалы функций $u_1(\tau)$, $v_1(\tau)$, задающих вторую кривую. Домножим числитель и знаменатель (1) на произведение $dtd\tau$ и получим формулу:

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \qquad (2)$$

Примеры. 1). Найдем угол между координатными линиями $\gamma : u = C$, $v = t$ и $\gamma_1 : u = \tau$, $v = C_1$ на произвольной поверхности F. Обозначим $u(t) = C$, $v(t) = t$, $u_1(\tau) = \tau$, $v_1(\tau) = C_1$. Тогда $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{dv}{dt} = 1$, $\frac{du_1}{d\tau} = 1$, $\frac{dv_1}{d\tau} = 0$. Найденные производные подставим в (1): $\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}$. Отсюда, в частности, следует, что координатные линии на поверхности ортогональны в некоторой точке тогда и только тогда, когда коэффициент $F = 0$ в этой точке.

2). Найдем угол между кривыми $\gamma : u + v^2 = 0$ и $\gamma_1 : u^2 - v = 0$, лежащими на геликоиде $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $\overline{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, av)$.

1 способ. Сначала найдем точки пересечения этих кривых. Для этого решим систему состоящую из уравнений кривых: $u + v^2 = 0$, $u^2 - v = 0$. Подставим $v = u^2$ в первое уравнение: $u^4 + u = 0$, отсюда $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $u_2 = -1$, $v_2 = 1$. Найдем угол между кривыми в точке $M(-1, 1)$ (в точке $M(0, 0)$ угол находится аналогично). Для этого перезададим кривые, напишем их параметрические уравнения. Для первой кривой положим $v = t$ тогда из уравнения кривой γ $u = -t^2$. Получаем параметрические уравнения кривой $\gamma : u = -t^2$, $v = t$. Аналогично, получим параметрические уравнения кривой $\gamma_1 : u = \tau,\ v = \tau^2$. При этом точке M соответствует на γ значение параметра $t = 1$, на γ_1 - $\tau = -1$. Обозначим через $u(t) = t^2,\ v(t) = t,\ u_1(\tau) = \tau,$ $v_1(\tau) = C_1$. Тогда $\frac{du}{dt}(1) = -2,\ \frac{dv}{dt}(1) = 1,\ \frac{du_1}{d\tau}(-1) = 1,\ \frac{dv_1}{d\tau}(-1) = -2$. Так как для геликоида $E = 1,\ F = 0,\ G = u^2 + a^2$, то в точке $M(-1, 1)$ получим, что $E = 1,\ F = 0,$ $G = 1 + a^2$. Подставим найденные производные и коэффициенты в (1):

$$\cos\theta = \frac{-2 + (1 + a^2)(-2)}{\sqrt{4 + (1 + a^2)^2}\sqrt{1 + 4(1 + a^2)}}. \tag{3}$$

2 способ. Продифференцируем уравнения кривых: $du + 2vdv = 0,\ 2u\delta u - \delta v = 0$. В точке $M(-1, 1) : du + 2dv = 0,\ -2\delta u - \delta v = 0$. Найдем по одному решению этих уравнений относительно дифференциалов функций (в силу однородности уравнений все решения их будут пропорциональны): $du = 2,\ dv = -1,\ \delta u = 1,\ \delta v = -2$ и подставим найденные дифференциалы в (2), получим (3).

3). На геликоиде дано семейство кривых $\gamma_c : u + v = C,\ C \in R$. Найдем кривые, пересекающие все кривые данного семейства под углом в $90°$. Такие кривые называются **ортогональными траекториями** семейства γ_c.

Пусть $\gamma : u = u(t),\ v = v(t)$ - ортогональная траектория семейства γ_c. Кривую семейства γ_c можно задать уравнениями вида $u = \tau,\ v = C - \tau$. Угол θ между γ и γ_c равен $90°$, поэтому $\cos\theta = 0$ и числитель в (1) для этих кривых равен $0 : u' - (u^2 + a^2)v' = 0$. Решаем это дифференциальное уравнение методом разделения переменных. Разнесем переменные в разные части уравнения $v' = \frac{u'}{u^2 + a^2}$, проинтегрируем это уравнение и получим искомое семейство кривых $v + C = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a}$.

Задача. Найти кривые на сфере, пересекающие все меридианы под постоянным углом (локсодромии). В качестве параметра на сфере взять широту и долготу точки.

Рассмотрим эту задачу в программе Mathematica 6. В ранних версиях программы надо убрать опцию $PlotStyle \to Directive[Opacity[0.2]]$ в команде $ParametricPlot3D$.

Введем вектор функцию, задающую сферу.

In[1]:= $\mathbf{r} = \{\mathbf{R\ Cos[v]Cos[u], R\ Cos[v]Sin[u], R\ Sin[v]}\};$

Найдем коэффициенты первой квадратичной формы сферы:

In[2]:= $\mathbf{e = D[r, u].D[r, u]//FullSimplify}$
$\mathbf{f = D[r, u].D[r, v]//FullSimplify}$
$\mathbf{g = D[r, v].D[r, v]//FullSimplify}$

Out[2]= $R^2 cos^2(v)$
0
R^2

и составим уравнение (2), в котором будем считать $du\ dv$ дифференциалами функций $u = u(t),\ v = v(t)$, задающих локсодромию, а $\delta u = 1\ \delta v = 0$ - дифференциалы функций, задающих меридианы сферы: $v = const$.

In[3]:= $\mathbf{Cos}[\alpha] == \frac{\mathbf{edu+fdv}}{(\sqrt{\mathbf{e}}\sqrt{\mathbf{edu^2+gdv^2}})}$

Out[3]= $\cos(\alpha) = \frac{du}{\sqrt{du^2 R^2 \cos^2(v) + R^2 dv^2}}$

Приведем это уравнение вручную к следующему виду:

$$du = \frac{Tan[a]^{-1}}{cos(v)} dv$$

и проинтегрируем

In[4]:= $\mathbf{u = 2Tanh(Tan(\frac{v}{2}))^{-1}Tan[\alpha]^{-1} + C}$

В результате, получим уравнение локсодромии на сфере

$$u = 2Tanh(Tan(\tfrac{t}{2}))^{-1}Tan[\alpha]^{-1} + C;$$
$$v = t$$

и параметрические уравнения локсодромии:

In[5]:= $\mathbf{r1 = \{RCos[v]Cos[u], RCos[v]Sin[u], RSin[v]\}/.}$
$\mathbf{\{u \to 2Tanh(Tan(\tfrac{t}{2}))^{-1}Tan[\alpha]^{-1} + C, v \to t\}}$

Out[5]= $\{R\cos(t)\cos(2\tanh^{-1}(\tan(\tfrac{t}{2}))\cot(\alpha) + C),$
$R\cos(t)\sin(2\tanh^{-1}(\tan(\tfrac{t}{2}))\cot(\alpha) + C), \sin(t)\}$

Построим локсодромию, определив предварительно угол, радиус сферы и константу интегрирования:

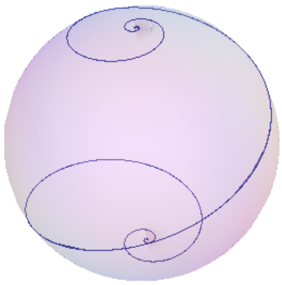
In[6]:= $\mathbf{C = 0; \alpha = .3; R = 1;}$
$\mathbf{q = ParametricPlot3D[r1//N, \{t, -5Pi, 5Pi\}];}$

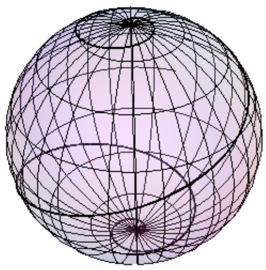
Построим сферу и сделаем ее прозрачной.

In[7]:= $\mathbf{p = ParametricPlot3D[r, \{u, 0, Pi\}, \{v, 0, 2Pi\},}$
$\mathbf{PlotStyle \to Directive[Opacity[0.2]], Mesh \to None];}$

Совместим графики сферы и локсодромии. Начала и конец локсодромии близки к полюсам сферы.

In[8]:= $\mathbf{Show[p, q, Boxed \to False, Axes \to False]}$





15.6 Вторая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим на гладкой поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$ вектор-функцию

$$\overline{n}(u, v) = \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{|\overline{r}_u \times \overline{r}_v|}(u, v).$$

Вектор $\overline{n}(u, v)$ - это направляющий вектор нормали к поверхности F в точке $M(u, v) \in F$. Пусть $d\overline{n} = \overline{n}_u du + \overline{n}_v dv$ - дифференциал $\overline{n}(u, v)$, $\overline{n}_u = \frac{\partial \overline{n}}{\partial u}$, $\overline{n}_v = \frac{\partial \overline{n}}{\partial v}$.

Второй квадратичной формой поверхности называется скалярное произведение $(-d\overline{r} \cdot d\overline{n})$. Обозначение формы: II.

Найдем вид второй квадратичной формы. Запишем $II = -d\overline{r} \cdot d\overline{n} = (\overline{r}_u du + \overline{r}_v dv) \cdot (\overline{n}_u du + \overline{n}_v dv)$ или

$$II = -[(\overline{r}_u \cdot \overline{n}_u)du^2 + (\overline{r}_u \cdot \overline{n}_v)dudv + (\overline{r}_v \cdot \overline{n}_u)dudv + (\overline{r}_v \cdot \overline{n}_v)dv^2] \qquad (1)$$

Введем обозначение $L = -\overline{r}_u \cdot \overline{n}_u$, $M = -\overline{r}_u \cdot \overline{n}_v$, $N = -\overline{r}_v \cdot \overline{n}_v$ и покажем, что $M = -\overline{r}_v \cdot \overline{n}_u$. ■ Для этого заметим, что если $\overline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, то производные $\overline{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\overline{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, $\overline{r}_{uu} = (x_{uu}, y_{uu}, z_{uu})$, $\overline{r}_{uv} = (x_{uv}, y_{uv}, z_{uv})$, $\overline{r}_{vv} = (x_{vv}, y_{vv}, z_{vv})$. В силу известной теореме из анализа $x_{uv} = x_{vu}$, $y_{uv} = y_{vu}$, $z_{uv} = z_{vu}$. Отсюда получаем, что вторые производные гладкой вектор-функции коммутируют: $\overline{r}_{uv} = \overline{r}_{vu}$.

Продифференцируем теперь тождества $\overline{r}_u \cdot \overline{n} = 0$, $\overline{r}_v \cdot \overline{n} = 0$ по u и v:

$$\begin{array}{ll} \overline{r}_{uu} \cdot \overline{n} + \overline{r}_u \cdot \overline{n}_u = 0, & \overline{r}_{uv} \cdot \overline{n} + \overline{r}_u \cdot \overline{n}_v = 0, \\ \overline{r}_{vu} \cdot \overline{n} + \overline{r}_v \cdot \overline{n}_u = 0, & \overline{r}_{vv} \cdot \overline{n} + \overline{r}_v \cdot \overline{n}_v = 0. \end{array} \tag{2}$$

Из второго и третьего равенств (2) получим, что $M = -\overline{r}_u \cdot \overline{n}_v = \overline{r}_{uv} \cdot \overline{n} = \overline{r}_{vu} \cdot \overline{n} = -\overline{r}_v \cdot \overline{n}_u$. ■ Отсюда и из (1) окончательно получаем:

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

Равенства (2) показывают, что $L = \overline{r}_{uu} \cdot \overline{n}$, $M = \overline{r}_{uv} \cdot \overline{n}$, $N = \overline{r}_{vv} \cdot \overline{n}$, откуда следуют простые формулы для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы:

$$L = \overline{r}_{uu} \cdot \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{|\overline{r}_u \times \overline{r}_v|}, \quad M = \overline{r}_{uv} \cdot \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{|\overline{r}_u \times \overline{r}_v|}, \quad L = \overline{r}_{vv} \cdot \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{|\overline{r}_u \times \overline{r}_v|}.$$

Асимптотические линии поверхности. Вектор $\overline{p}$ с координатами (a, b) в базисе $\{\overline{r}_u, \overline{r}_v\}$ касательной плоскости $T_M F$ поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$ имеет **асимптотическое направление,** если

$$La^2 + 2Mab + Nb^2 = 0 \tag{2}$$

Гладкая кривая, лежащая на поверхности, **называется асимптотической,** если каждый ее касательный вектор имеет асимптотическое направление.

Если $\gamma : u = u(t)$, $v = v(t)$ - асимптотическая линия, то ее касательный вектор $(u'(t), v'(t))$ удовлетворяет уравнению (2):

$$Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 = 0. \tag{3}$$

Обратно, если гладкие функции $u(t), v(t)$ удовлетворяют уравнению (3), то $u = u(t)$, $v = v(t)$ - уравнения асимптотических линий на поверхности.

Из уравнения асимптотических линий следует, что координатные линии $u = const$, $v = const$ являются асимптотическими тогда и только тогда $L = N = 0$.

Пример. Найдем уравнение асимптотических линий на геликоиде $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $\overline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$. Так как частная производная $\overline{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\overline{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, a)$, $\overline{r}_{uu} = (0,0,0)$, $\overline{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$, $\overline{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$, $\overline{r}_u \times \overline{r}_v = (a\sin v, -a\cos v, u)$, $|\overline{r}_u \times \overline{r}_v| = \sqrt{a^2+u^2}$, то $\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a\sin v, -a\cos v, u)$, $L = 0$, $M = -\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}$, $N = 0$. Составим уравнение (3): $-\frac{2a}{\sqrt{a^2+u^2}}u'v' = 0$. Это уравнение распадается на два линейных относительно производных уравнения $u' = 0$ и $v' = 0$. Интегрируя, получим два семейства асимптотических линий на геликоиде: $u = const$ и $v = const$. Это координатные линии.

Задача. Показать, что при $b = LN - M^2 > 0$ в точке M поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$ не существует асимптотических линий, проходящих через точку M, при $b = 0$ через точку M проходит одна асимптотическая линия, при $b < 0$ - две асимптотическая линия.

15.7 Нормальная кривизна поверхности

Нормальной кривизной поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$ в точке $M \in F$, в направлении вектора $\overline{p}$, имеющего координаты (a, b) в базисе $\{\overline{r}_u, \overline{r}_v\}$ касательной плоскости $T_M F$, называется число, равное

$$\frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}. \tag{1}$$

Здесь коэффициенты I и II форм вычислены в точке M. Обозначается нормальная кривизна k_n. Итак, $k_n = \frac{II(a,b)}{I(a,b)}$, где $II(a, b)$ - числитель, $I(a, b)$ - знаменатель дроби (1). Иногда пишут проще: $k_n = \frac{II}{I}$. Заметим, что для параллельных векторов нормальные кривизны, вычисленные по формуле (1), равны. Действительно, если $\overline{q} = (a_1, b_1)||\overline{p} = (a, b)$, то $\frac{a}{a\,1} = \frac{b}{b_1}$ или $\frac{b_1}{a\,1} = \frac{b}{a}$. Поэтому

$$\frac{II(a, b)}{I(a, b)} = \frac{II(1, \frac{b}{a})}{I(1, \frac{b}{a})} = \frac{II(1, \frac{b_1}{a_1})}{I(1, \frac{b_1}{a_1})} = \frac{II(a_1, b_1)}{I(a_1, b_1)}.$$

Отсюда, в частности, следует, что функцию k_n можем считать заданной на единичных векторах $\overline{p}$, $|\overline{p}| = 1$, или, что то же самое, на окружности в $T_M F$ с центром в точке M и радиуса 1. Так как непрерывная функция достигает на компакте своих экстремальных значений, то k_n достигает своего max и min в данной точке поверхности.

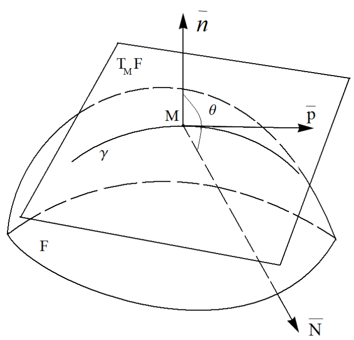
Геометрическая характеристика нормальной кривизны в точке $M \in F$ и направлении вектора $\overline{p} = (a, b)$.

Возьмем на поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$ гладкую кривую $\gamma : u = u(s)$, $v = v(s)$, касающуюся вектора $\overline{p}$; здесь s - натуральный параметр кривой γ на поверхности F. Тогда $\overline{r} = \overline{r}(u(s), v(s))$ - естественная параметризация γ и ее касательный вектор $\overline{r}' = \overline{r}_u u' + \overline{r}_v v' || \overline{p} = \overline{r}_u a + \overline{r}_v b$, поэтому

$$\frac{u'}{v'} = \frac{a}{b} \tag{2}$$

Отметим также, что $|\overline{r}'| = 1$ (см. лемму 15.1). Поэтому $1 = |\overline{r}'|^2 = (\overline{r}_u u' + \overline{r}_v v')^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$, то есть

$$I(u', v') = 1 \tag{3}$$



Найдем теперь вектор $\overline{N}$ кривизны кривой γ в точке M. По определению $\overline{N} = \overline{r}'' = (\overline{r}_u u' + \overline{r}_v v')' = \overline{r}_{uu} u'^2 + 2\overline{r}_{uv} u'v' + \overline{r}_{vv} v'^2 + \overline{r}_u u'' + \overline{r}_v v''$. Пусть $\overline{n}$ единичный вектор нормали к $T_M F$. Так как $\overline{r}_u \perp \overline{n}$, $\overline{r}_v \perp \overline{n}$, то $\overline{N} \cdot \overline{n} = (\overline{r}_{uu} \cdot \overline{n}) u'^2 + 2(\overline{r}_{uv} \cdot \overline{n}) u'v' + (\overline{r}_{vv} \cdot \overline{n}) v'^2$. Справа стоит $II(u', v')$. Поэтому, учитывая (3), (2), можно записать:

$$\overline{N} \cdot \overline{n} = II(u', v') = \frac{II(u', v')}{I(u', v')} = \frac{II(a, b)}{I(a, b)} = k_n.$$

Таким образом,

$$k_n = \overline{N} \cdot \overline{n}. \tag{4}$$

Пусть θ - угол между $\overline{N}$ и $\overline{n}$. Так как $|\overline{N}| = k$ - кривизна кривой γ в точке M, то из (4) следует формула

$$k_n = k\cos\theta, \tag{5}$$

которая составляет содержание **теоремы Менье.**

Сделаем второй вывод из (4). Заметим, что в (4) левая часть не зависит от выбора кривой γ на F, касающейся вектора $\overline{p}$, следовательно, для любой кривой $\gamma \subset F$ и касающейся вектора $\overline{p}$, проекция вектора кривизны $\overline{N}$ этой γ на единичный вектор $\overline{n}$ нормали к поверхности F (то есть $\overline{N}\cdot\overline{n}$) постоянна и равна k_n. В частности, возьмем в качестве γ **нормальное сечение** поверхности F, то есть кривую, полученную от пересечения F и плоскости, проходящей через точку M параллельно $\overline{n}$ и $\overline{p}$ (нормальная плоскость)[1]

Вектор кривизны $\overline{N}$ нормального сечения γ в точке M будет лежать в секущей плоскости, а, значит, будет параллелен вектору $\overline{n}$, поэтому $\theta = 0, \pi$. Из (5): $k_n = \pm k$. Таким образом, **нормальная кривизна поверхности равна, с точностью до знака, кривизне нормального сечения поверхности**. В этом содержится геометрический смысл нормальной кривизны k_n.

Задачи 1). Найти нормальную кривизну поверхности в асимптотическом направлении. Доказать, что в точках асимптотической линии её соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью.

2). Пусть γ - сечение параболоида $F: z = x^2 + y^2$ плоскостью, проходящей через вершину O параболоида и образующей с нормальным вектором к F в точке O угол $30°$. Найти кривизну γ в точке O.

15.8 Классификация точек гладкой поверхности

Пусть $F: \overline{r} = \overline{r}(u,v)$ - поверхность, точка $M \in F$. Если в этой точке, в каждом направлении касательной плоскости T_MF нормальная кривизна равна нулю, то такая точка называется точкой **уплощения**. Все кривизны нормальных сечений поверхности в этой точке равны нулю. Значит, все коэффициенты второй квадратичной формы L, M, N равны нулю в точке уплощения. Так как у плоскости все нормальные кривизны равны нулю, то можно сказать, что в окрестности точки уплощения поверхность устроена как плоскость.

Пусть теперь, точка $M \in F$ не является точкой уплощения. В касательной плоскости T_MF от точки M в каждом направлении отложим отрезок длины $|k_n|^{-\frac{1}{2}}$, k_n - нормальная кривизна поверхности в рассматриваемом направлении. Если $k_n = 0$ в данном направлении, то откладываем от точки M луч. Множество концов всех таких

[1] Заметим, что нормальное сечение γ в окрестности точки M есть гладкая кривая. Действительно γ допускает задание вида

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{cases}$$

где первое уравнение задает поверхность F в окрестности точки M, а второе - нормальную плоскость. При этом

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ A & B & C \end{pmatrix} = 2$$

так как векторы (F_x, F_y, F_z) - нормальный вектор к поверхности F, и (A, B, C) - нормальный вектор к секущей плоскости, ортогональны. Следовательно, γ - гладкая кривая.

отрезков называется **индикатрисой кривизны** (или **индикатрисой Дюпена**). Найдем уравнение этого множества в аффинной системе координат $(M, \overline{r}_u, \overline{r}_v)$.

■ Пусть $P(x, y)$ - произвольная точка индикатрисы, $\overline{e}$ - орт вектора $\overline{MP}$. Тогда $\overline{MP} = x\overline{r}_u + y\overline{r}_v$. С другой стороны $\overline{MP} = |k_n|^{-\frac{1}{2}}\overline{e}$. Поэтому $x\overline{r}_u + y\overline{r}_v = |k_n|^{-\frac{1}{2}}\overline{e}$. Подставим сюда выражение нормальной кривизны $k_n = II(x, y)/I(x, y)$ и возведем в квадрат обе части полученного равенства:

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = |\frac{I(x, y)}{II(x, y)}|$$

или

$$I(x, y) = |\frac{I(x, y)}{II(x, y)}|$$

Так как $I = dr^2 > 0$, то отсюда получаем, что $|II(x, y)| = 1$ или

$$|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2| = 1. \tag{1}$$

Уравнение (1) есть уравнение индикатрисы кривизны. Преобразуем это уравнение, выделив под модулем полный квадрат. Допустим, что $L^2 + N^2 \neq 0$. Для определенности, будем считать, что $L \neq 0$. Случай $N \neq 0$ приводит к аналогичному результату. Тогда

$$|L(x^2 + 2\frac{M}{L}xy + \frac{M^2}{L^2}y^2) - \frac{M^2}{L}y^2 + Ny^2| = 1$$

или

$$|L(x + \frac{M}{L}y)^2 + \frac{LN - M^2}{L}y^2| = 1.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{1}{|L|}|(x + \frac{M}{L}y)^2L^2 + by^2| = 1, \tag{2}$$

где $b = LN - M^2$.

Если в (1) $L = N = 0$, то $M \neq 0$, так как в противном случае, в данной точке поверхности $II(x, y) = 0$ и точка M будет точкой уплощения. При этом $b = -M^2 < 0$.

Уравнение (2) позволяет дать некоторую классификацию точек поверхности:

1. Если в данной точке $b > 0$, то (2) есть уравнение эллипса $\frac{(x+\frac{M}{L}y)^2}{|L|^{-1}} + \frac{y^2}{|L|b^{-1}} = 1$. Точка M, в которой $b > 0$, называется **эллиптической точкой** поверхности. В частности, если (1) - уравнение окружность, то точка M называется **омбилической** точкой. Любая точка эллиптического параболоида или эллипсоида является эллиптической точкой. В омбилической точке поверхности нормальная кривизна не зависит от направления. Это возможно тогда и только тогда, когда коэффициенты I и II форм пропорциональны. ■ Действительно, пусть $k_n = \lambda = const$, то есть $\lambda = \frac{Lx^2+2Mxy+Ny^2}{Ex^2+2Fxy+Gy^2}$ для всех x, y. Перепишем равенство так: $(L-E\lambda)x^2+2(M-F\lambda)xy+(N-G\lambda)y^2 = 0$. Но это равенство выполняется для всех x, y лишь тогда, когда $L - E\lambda = 0$, $M - F\lambda = 0$, $N - G\lambda = 0$.

2. Если $b < 0$, то (2) есть уравнения сопряженных гипербол $\frac{(x+\frac{M}{L}y)^2}{|L|^{-1}} - \frac{y^2}{|L||b|^{-1}} = \pm 1$. Точка M в этом случае называется **гиперболической** точкой. Точки гиперболического параболоида, например, являются гиперболическими точками.

3. Если $b = 0$, то (2) есть пара параллельных прямых $x + \frac{M}{L}y = \pm\sqrt{|L|^{-1}}$. Точки поверхности, в которых выполняется условие $b = 0$, называются **параболическими** точками. Примером параболических точек являются, например, точки цилиндрической или конической поверхности.

Таким образом, все точки поверхности разбиваются на четыре типа точек: эллиптические точки (в частности, омбилические точки), гиперболические точки, параболические и точки уплощения.

Пример. Все точки геликоида - гиперболические точки, так как для геликоида $b = -\frac{a^2}{4(a^2+u^2)} < 0$.

15.9 Линии кривизны

Наибольшее и наименьшее значения нормальной кривизны поверхности в точке M называются **главными кривизнами** поверхности в точке M.

Направление в касательной плоскости, соответствующее главной кривизне, называется **главным направлением.**

Как отмечалось в §16.7, в каждой точке поверхности существует по крайней мере два главных направления, а значит и две главные кривизны.

Гладкая линия на поверхности называется **линией кривизны,** если касательный вектор к этой линии в каждой ее точке имеет главное направление.

Как найти линии кривизны на поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$? Возьмем точку $M \in F$ и найдем сначала уравнение для определения координат вектора $\overline{p}$, задающего главные направления в точке M, (координаты вектора в базисе $\{\overline{r}_u, \overline{r}_v\}$ касательной плоскости T_MF).

По определению, координаты вектора $\overline{p}$ дают экстремальное значение функции $k_n = \frac{II(x,y)}{I(x,y)}$ переменных x, y и, как известно из анализа, удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial k_n}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial k_n}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Дифференцируя функцию $\frac{II}{I} = \frac{Lx^2+2Mxy+Ny^2}{Ex^2+2Fxy+Gy^2}$ по x, затем по y, получим

$$\begin{gathered}(Lx + My)I(x, y) - (Ex + Fy)II(x, y) = 0,\\ (Mx + Ny)I(x, y) - (Fx + Gy)II(x, y) = 0.\end{gathered}$$

Исключая из этих уравнений $I(x, y) > 0$ и $II(x, y)$, получим уравнение для определения координат главных направлений:

$$\begin{vmatrix} Lx + My & -(Ex + Fy) \\ Mx + Ny & -(Fx + Gy) \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Обычно уравнение (1) записывают в следующей форме:

$$\begin{vmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Из (2) следует, что всегда существует два главных направления, если коэффициенты форм I и II непропорциональны. В этом случае (1) - квадратичное уравнение. Если же $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$, то любое направление является главным, что справедливо для омбилических точек.

Пример. Найдем главные направления на геликоиде в точке $M(0,0)$. Так как $E=1$, $F=0$, $G=a^2+u^2$, $L=N=0$, $M=-\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$, то в точке $M(0,0): E=1$, $F=0$, $G=a^2$, $L=N=0$, $M=-1$ и уравнение (2) примет вид

$$\begin{vmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или $y^2a^2 - x^2 = 0$ или $ya = \pm x$. Таким образом, $x=a$, $y=1$ и $x=-a$, $y=1$ - два главных направления.

Выведем теперь уравнение для линий кривизны. Если $\gamma : u = u(t)$, $v = v(t)$ - линяя кривизны, то каждый ее касательный вектор (u', v') удовлетворяет уравнению (2):

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) есть дифференциальное уравнение для определения функций $u(t)$ и $v(t)$, задающих линии кривизны на поверхности F.

Примеры. 1). На плоскости и сфере любая кривая есть линия кривизны.

2). Найдем линии кривизны на геликоиде. Составим уравнение (3):

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -v'u' & u'^2 \\ 1 & 0 & u^2+a^2 \\ 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или $v'^2(u^2+a^2) - u'^2 = 0$. Это квадратичное уравнение относительно производных u', v' эквивалентно двум линейным уравнениям: $v'\sqrt{u^2+a^2} = \pm u'$. Разделим теперь переменные, соберем в левой части слагаемые, содержащие только v, а в правой u : $v' = \pm\frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}}$ и проинтегрируем по dt : $v = \pm\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$. Получили два семейства линий кривизны на геликоиде.

Задача. Показать, что в каждой неомбилической точке поверхности главные направления ортогональны.

15.10 Главные кривизны поверхности

Получим уравнение, которому удовлетворяют главные кривизны поверхности F в точке M. Пусть k_1, k_2 - главные кривизны поверхности F в точке M и $k_1 \geqslant k_2$. Тогда k_1 - максимум, а k_2 - минимум отношения $\frac{II(x,y)}{I(x,y)}$. Следовательно, для любых $x, y : \frac{II(x,y)}{I(x,y)} \leqslant k_1$ или $II(x,y) - k_1 I(x,y) \leqslant 0$. Пусть равенство здесь достигается при $x = x_0, y = y_0$ (очевидно, что (x_0, y_0) - главное направление). Таким образом, функция $II(x,y) - k_1 I(x,y)$ достигает максимума в (x_0, y_0), поэтому, как следует из анализа,

$$\frac{\partial}{\partial x}(II(x,y) - k_1 I(x,y))|_{(x_0,y_0)} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(II(x,y) - k_1 I(x,y))|_{(x_0,y_0)} = 0.$$

Продифференцировав функции, получим:

$$\begin{array}{c}(L-k_1E)x_0+(M-k_1F)y_0=0\\(M-k_1F)x_0+(N-k_1G)y_0=0\end{array}\tag{1}$$

Исключим из этих равенств x_0, y_0, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} L-k_1E & M-k_1F \\ M-k_1F & N-k_1G \end{vmatrix}=0.$$

Рассуждая аналогичным образом относительно k_2, получим, что k_2 удовлетворяет такому же уравнению. Следовательно, k_1, k_2 есть решения уравнения

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0$$

или

$$k^2(EG-F^2)+k(2MF-LG-EN)+(LN-M^2)=0 \tag{2}$$

Гауссовой (или полной) кривизной K поверхности F в точке $M\in F$ называется число, равное произведению главных кривизн поверхности F в точке M: $K=k_1k_2$. **Средней кривизной** H поверхности F в точке $M\in F$ называется число, равное полусумме главных кривизн поверхности в точке M: $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$. Из теоремы Виета и уравнения (2) получаем вычислительные формулы:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},\qquad H=\frac{1}{2}\frac{LG+EN-2MF}{EG-F^2}.$$

Из определения векторного произведения следует, что $EG-F^2=\overline{r}_u^2\overline{r}_v^2-(\overline{r}_u\cdot\overline{r}_v)^2=|\overline{r}_u|^2|\overline{r}_v|^2-|\overline{r}_u|^2|\overline{r}_v|^2\cos^2\alpha=|\overline{r}_u|^2|\overline{r}_v|^2\sin^2\alpha=|\overline{r}_u\times\overline{r}_v|^2>0$. Поэтому знак гауссовой кривизны K зависит от $b=LN-M^2$. Следовательно $K>0$ в эллиптических точках, $K<0$ в гиперболических точках и $K=0$ в параболических точках.

Теорема 15.1 (Родриг) *Пусть $F:\overline{r}=\overline{r}(u,v)$ - гладкая поверхность, $\overline{n}(u,v)$ - единичный нормальный вектор к F в точке (u,v). Кривая $\gamma: u=u(t)$, $v=v(t)$ является линией кривизны поверхности F тогда и только тогда, когда*

$$\overline{n}_udu+\overline{n}_vdv=-k(\overline{r}_udu+\overline{r}_vdv), \tag{3}$$

где k - нормальная кривизна в направлении касательного вектора (u',v'), du, dv - дифференциалы функций $u(t)$, $v(t)$.

■ Соотношение (3) обычно записывают в виде $d\overline{n}=-kd\overline{r}$, где дифференцирование понимается "вдоль кривой γ ". Пусть γ - линия кривизны на поверхности F. Тогда касательный вектор (u',v') к γ определяет главное направление. Подставляя (u',v') в (1) вместо x,y и, заменив коэффициенты $E=\overline{r}_u^2$, $F=\overline{r}_u\cdot\overline{r}_v$, $G=\overline{r}_v^2$, $M=-\overline{r}_v\cdot\overline{n}_u=-\overline{r}_u\cdot\overline{n}_v$, $L=-\overline{r}_u\cdot\overline{n}_u$, $N=-\overline{r}_v\cdot\overline{n}_v$, получим первые два равенства:

$$\begin{array}{c}\overline{r}_u\cdot[-(\overline{n}_u+k\overline{r}_v)u'-(\overline{n}_v+\overline{r}_v)v']=0,\\ \overline{r}_v\cdot[-(\overline{n}_u+k\overline{r}_v)u'-(\overline{n}_v+\overline{r}_v)v']=0,\\ \overline{n}\cdot[-(\overline{n}_u+k\overline{r}_v)u'-(\overline{n}_v+\overline{r}_v)v']=0.\end{array}\tag{4}$$

Последнее равенство есть очевидное тождество. Вектор, стоящий в скобках, будет перпендикулярен линейно независимым веткорам $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$, $\overline{n}$, что возможно, только для нулевого вектора: $(\overline{n}_u + k\overline{r}_v)u' - (\overline{n}_v + \overline{r}_v)v' = 0$. Домножим это равенство на dt и, перегруппировав, получим (3). Обратно, если верно равенство (3), то верны и равенства (4), а значит и (1). Поэтому k - главная кривизна, γ - линия кривизны. ■

Заметим, что если координатные линии $u = const$, $v = const$ являются линиями кривизны, то $\overline{n}_u = -k\overline{r}_u$, $\overline{n}_v = -k\overline{r}_v$.

Теорема 15.2 *Пусть две поверхности F_1 и F_2 пересекаются под постоянным углом по линии γ, причем γ - линия кривизны на F_1. Тогда γ есть линия кривизны на поверхности F_2.*

■ Пусть $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ - единичные нормальные векторы к F_1 и F_2 соответственно. Так как γ линия кривизны на F_1, то по теореме Родрига: $d\overline{n}_1 = -k_1 d\overline{r}$, где дифференцирование идет вдоль кривой γ. Для F_2 можем записать только общее разложение

$$d\overline{n}_2 = \lambda d\overline{r} + \beta\overline{n}_1 + \gamma\overline{n}_2. \tag{5}$$

Умножим это равенство скалярно на $\overline{n}_1$, затем на $\overline{n}_2$, получим $\overline{n}_1 \cdot d\overline{n}_2 = \beta\overline{n}_1^2 + \gamma\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2$, $\overline{n}_2 \cdot d\overline{n}_2 = \beta\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 + \gamma\overline{n}_2^2$. Но $\overline{n}_2 \cdot d\overline{n}_2 = 0$, а $\overline{n}_1 \cdot d\overline{n}_2 = d(\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2) - \overline{n}_2 \cdot d\overline{n}_1 = -\overline{n}_2 d\overline{n}_1 = \overline{n}_2 \cdot k d\overline{r} = 0$. Таким образом:

$$\beta\overline{n}_1^2 + \gamma\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0, \qquad \beta\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 + \gamma\overline{n}_2^2 = 0. \tag{6}$$

Если $\overline{n}_1 || \overline{n}_2$, то утверждение теоремы очевидно в силу теоремы Родрига, если $\overline{n}_1 \not\parallel \overline{n}_2$, то есть поверхности не касаются, то $\overline{n}_1 \times \overline{n}_2 \neq 0$ и определитель системы (6) $\overline{n}_1^2\overline{n}_2^2 - (\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2)^2 = |\overline{n}_1 \times \overline{n}_2|^2 > 0$. Однородная система с таким определителем имеет нулевые решения $\beta = \gamma = 0$, тогда из (5) $d\overline{n}_2 = -kd\overline{r}$, что означает, что γ - линия кривизны на F_2. ■

Следствие. Если сфера или плоскость пересекают какую-либо поверхность под постоянным углом, то линия пересечения есть линия кривизны на поверхности.

Задачи. 1). Найти линии кривизны поверхности вращения двумя способами: применяя доказанную теорему и применяя уравнение (1) §16.9. Найти условия, при которых через каждую точку поверхности вращения проходят только две линии кривизны.

2). Пусть $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$ - гладкая поверхность, $\overline{n}(u, v)$ - единичный нормальный вектор к F. Поверхность $F_t : \overline{R} = \overline{r}(u, v) + t\overline{n}(u, v)$ называется **параллельной поверхность** для поверхности F высоты t. Доказать, что

а) касательные плоскости в точках с одинаковыми значениями параметров (соответствующие точки) параллельны;

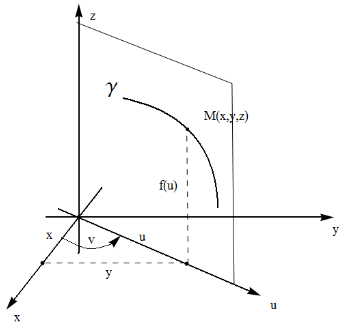
б) линии кривизны на F и F_t соответствующие;

Найти связь между длинами соответствующих дуг кривых на этих поверхностях.

3). Найти Гауссову кривизну для поверхности, заданной неявно.

15.11 Поверхности вращения

Возьмем в плоскости π, содержащей ось OZ, гладкую кривую γ. Начнем вращать



плоскость около оси OZ. Кривая γ опишет поверхность вращения F. Пусть γ задается уравнением $z = f(u)$ в декартовой системе координат UOZ плоскости π, а v - угол между положительными полуосями OX и OU. Тогда для координат (x, y, z) точки $M \in F$ можно записать:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(u). \tag{1}$$

Функции в (1) - гладкие функции по переменным u и v, кроме того

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & f'(u) \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

при $u > 0$. Так как уравнения (1) задают окрестность любой точки $M \in F$, то F - простая поверхность, если $f(u)$ - гладкая функция и $u > 0$.

Найдем первую квадратичную форму I и гауссову кривизну K поверхности вращения F. Если функции в (1) есть координатные функции вектор-функции $\overline{r}(u, v)$, то $\overline{r}_u = (\cos v, \sin v, f'(u))$, $\overline{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$. Отсюда $E = \overline{r}_u^2 = 1 + f'(u)^2$, $F = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v = 0$, $G = \overline{r}_v^2 = u^2$ и, следовательно первая квадратичная форма поверхности

$$I = (1 + f'(u)^2)du^2 + u^2dv^2. \tag{2}$$

Рассмотрим замену параметров: $\overline{u} = \int\sqrt{1 + f'(u)^2}du$, $\overline{v} = v$ (3). Так как

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial\overline{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial\overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial\overline{v}}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{1 + f'(u)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1 + f'(u)^2} \neq 0,$$

то замена (3) является допустимой заменой параметров. В новых переменных, которые опять обозначим через u, v, первая квадратичная форма поверхности вращения примет вид

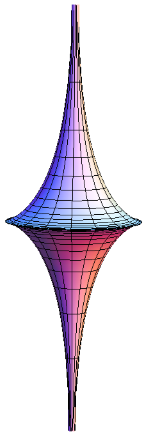
$$I = du^2 + G(u)dv^2. \tag{4}$$

Найдем теперь гауссову кривизну поверхности вращения (1). Найдем вторые производные вектор-функции, задающей поверхность вращения:
$\overline{r}_{uu} = (0, 0, f''(u))$, $\overline{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$, $\overline{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$,
$\overline{r}_u \times \overline{r}_u = (-f'(u)u\cos v, -f'(u)u\sin v, u)$, $|\overline{r}_u \times \overline{r}_u| = \sqrt{f'(u)^2u^2 + u^2}$. Отсюда получаем: $\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(u)^2}}(-f'(u)\cos v, -f'(u)\sin v, 1)$, $L = \overline{n} \cdot \overline{r}_{uu} = \frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}$, $M = \overline{n} \cdot \overline{r}_{uv} = 0$, $N = \overline{n} \cdot \overline{r}_{vv} = \frac{uf'(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}$, а, применяя формулу для Гауссовой кривизны из §16.10, получим:

$$K = \frac{f'(u)f''(u)}{u(1 + f'(u)^2)^2}. \tag{5}$$

Рассмотрим два частных случая поверхности вращения.

Сфера. Возьмем в плоскости UOZ окружность $z^2 + u^2 = a^2$ и рассмотрим ее правую половину $\gamma : z = \pm\sqrt{a^2 - u^2}$, $u > 0$. При вращении плоскости UOZ около оси



OZ кривая γ опишет поверхность вращения F - сферу без полюсов. Найдем гауссову кривизну K. Так как $f(u) = \pm\sqrt{a^2-u^2}$, то $f'(u) = \mp\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}$, $f''(u) = \mp\frac{a^2}{(\sqrt{a^2-u^2})^3}$ и из формулы (5) получаем: $K = \frac{1}{a^2}$. Таким образом, сфера есть поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны. Первая квадратичная форма сферы примет вид: $I = \frac{a^2}{a^2-u^2}du^2 + u^2dv^2$. Рассмотрим допустимую замену параметров $\overline{u} = \int\frac{a}{\sqrt{a^2-u^2}}du = -a\,arccos\frac{u}{a}$, $\overline{v} = av$ (6). Отсюда: $u = a\cos\frac{\overline{u}}{a}$, $v = \frac{\overline{u}}{a}$, и первая квадратичная форма сферы в новых переменных, которые опять обозначим через u и v, примет вид:

$$I = du^2 + \cos^2\frac{u}{a}dv^2.$$

Псевдосфера - это поверхность, образованная вращением трактрисы $\gamma : z = a(\ln tg\frac{t}{2} + \cos t)$, $u = a\sin t$; здесь кривая γ задана параметрическими уравнениями в плоскости UOZ. Если $z = f(u)$ также уравнение трактрисы, то $z'_t = f'(u)u'_t$, откуда $f'(u) = \frac{z'_t}{u'_t}$. Из уравнения трактрисы находим $z'_t = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}$, $u'_t = a\cos t$, откуда $f'(u) = ctgt$. Дифференцируя по t, получим $f''(u)u'_t = -\frac{1}{\sin^2 t}$ или $f''(u) = -\frac{1}{a\cos t\sin^2 t}$. Подставляем найденные производные в (5): $K = -\frac{1}{a^2}$. Таким образом, псевдосфера является поверхностью постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Найдем первую квадратичную форму сферы I. Так как $f' = ctgt = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}}{\frac{u}{a}}$, то $I = \frac{a^2}{u^2}du^2 + u^2dv^2$. Сделаем замену $\overline{u} = alnu$, $\overline{v} = v$, отсюда $u = e^{\frac{\overline{u}}{a}}$, $v = \overline{v}$. В новых переменных, которые опять обозначим через $u, v : I = du^2 + e^{\frac{2u}{a}}dv^2$.

Можно ввести такую параметризацию псевдосферы, что первая форма будет иметь вид:

$$I = du^2 + ch^2\frac{u}{a}dv^2.$$

Задачи. 1). Найти все поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны.
2). Найти все поверхности вращения нулевой средней кривизны.

16 Внутренняя геометрия поверхности

К внутренней геометрии поверхности относятся те свойства поверхности и фигур на ней, которые зависят только от первой квадратичной формы поверхности. К таким свойствам относятся длина дуги кривой на поверхности, площадь области, угол между кривыми на поверхности.

16.1 Теорема Гаусса

С каждой точкой M гладкой поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$ можно связать аффинную систему координат $(M, \overline{r}_u, \overline{r}_v, \overline{n})$, $\overline{n} = \frac{\overline{r}_u\times\overline{r}_v}{|\overline{r}_u\times\overline{r}_v|}$. Найдем разложение производных вектор-функции $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$, $\overline{n}$ по векторам базиса $\{\overline{r}_u, \overline{r}_v, \overline{n}\}$. Разложения имеют вид:

$$\begin{gathered}\overline{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\overline{r}_u + \Gamma^2_{11}\overline{r}_v + \lambda_1\overline{n},\\ \overline{r}_{uv} = \Gamma^1_{12}\overline{r}_u + \Gamma^2_{12}\overline{r}_v + \lambda_2\overline{n},\\ \overline{r}_{uu} = \Gamma^1_{22}\overline{r}_u + \Gamma^2_{22}\overline{r}_v + \lambda_3\overline{n},\\ \overline{n}_u = \alpha\overline{r}_u + \beta\overline{r}_v, \quad \overline{n}_v = \alpha_1\overline{r}_u + \beta_1\overline{r}_v.\end{gathered} \tag{1}$$

Коэффициенты без труда вычисляются. Так, умножая первые три равенства (1) на вектор $\overline{n}$ скалярно, получим $\lambda_1 = \overline{r}_{uu} \cdot \overline{n} = L$, $\lambda_2 = \overline{r}_{uv} \cdot \overline{n} = M$, $\lambda_3 = \overline{r}_{vv} \cdot \overline{n} = N$. Умножая (1) на вектор $\overline{r}_u$, затем на $\overline{r}_v$, из первых трех уравнений получим систему для определения коэффициентов Γ_{ij}^k :

$$\begin{array}{rr} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2}E_u, & \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2}E_v, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2}G_u, & \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2}E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2}G_u, & \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2}G_v. \end{array} \tag{2}$$

Система (2) позволяет выразить коэффициенты Γ_{ij}^k только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные, следовательно, Γ_{ij}^k есть объекты внутренней геометрии поверхности.

Пример. Найдем коэффициенты Γ_{ij}^k для поверхности, у которой первая квадратичная форма $I = du^2 + G(u,v)dv^2$. Записывая систему (2), получим: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}$, $\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_u$, $\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}$.

Следующая теорема получается прямым вычислением с использованием разложений (1).

Теорема 16.1 (Гаусс) *Пусть K - полная кривизна поверхности. Тогда*

$$K = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\right).$$

Из этой теоремы следует, что полная кривизна поверхности является объектом внутренней геометрии поверхности.

Задача. Доказать, что полная кривизна поверхности с первой квадратичной формой $I = du^2 + G(u)dv^2$ имеет вид $K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$.

16.2 Изометрические поверхности

Рассмотрим элементарные гладкие поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$ $(u,v) \in G$ и $F_1 : \overline{r} = \overline{r}_1(u_1,v_1)$, $(u_1,v_1) \in G_1$. Любое отображение $f : F \to F_1$ порождает отображение $\hat{f} : G \to G_1$ по следующему правилу: если f сопоставляет точке $A(u,v) \in F$ точку $A_1(u_1,v_1) \in F_1$, то отображение $\hat{f} : G \to G_1$ ставит в соответствие точке $(u,v) \in G$ точку $(u_1,v_1) \in G_1$. Точно также любое отображение $\hat{f} : G \to G_1$ порождает отображение поверхностей $f : F \to F_1$.

Отображение поверхностей $f : F \to F_1$ называется **диффеоморфизмом,** если порожденное им отображение $\hat{f} : G \to G_1$ - диффеоморфизм (см. §16.3).

Диффеоморфизм поверхностей, сохраняющий длины кривых, называется **изометрией** или **изометрическим отображением** поверхностей.

Изометрия поверхностей определена с помощью их параметризаций, но можно показать, что изометрия не зависти от выбора допустимых параметризаций поверхностей.

Теорема 16.2 *1). Пусть даны две поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$ и $F_1 : \overline{r} = \overline{r}_1(u,v)$, заданные над одним и тем же множеством G. Пусть в точках с одинаковыми координатами (u,v) первые квадратичные формы этих поверхностей совпадают. Тогда поверхности изометричны.*

2). Если поверхности изометричны, то существуют такие их параметризации, что в соответствующих по изометрии точках их первые квадратичные формы совпадают.

■ 1). Тождественное отображение $\hat{f} : G \to G$ порождает диффеоморфизм $f : F \to F_1$, сопоставляющий точки этих поверхностей с одинаковыми криволинейными координатами. Покажем, что $f : F \to F_1$ - изометрия. Возьмем произвольную кривую $\gamma \subset F$. Если кривая γ задана уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, то ее образ $f(\gamma)$ будет задаваться такими же уравнениями. Для длин L и L_1 этих кривых можно записать

$$L = \int \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt = L_1,$$

так как первые квадратичные формы этих поверхностей совпадают в точках с одинаковыми значениями параметров. Таким образом, f - изометрия, следовательно, поверхности изометричны.

2). Пусть $f : F \to F_1$ - изометрия поверхностей $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in G$ и $F_1 : \overline{r} = \overline{r}_1(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in G_1$. Изометрия F порождает диффеоморфизм $\hat{f} : G \to G_1$. Допустим, что $\hat{f}$ задается равенствами (1) и условием (2) §16.3. Тогда функции (1) §16.3 можно рассматривать как допустимую замену параметров (u_1, v_1) в вектор-функции $\overline{r}_1(u_1, v_1)$. Совершив такую замену и обозначив $\overline{R}(u, v) = \overline{r}_1(\varphi(u, v), \psi(u, v))$, получим, что поверхность f_1 задана теперь векторным уравнением $\overline{r} = \overline{R}(u, v)$, $(u, v) \in G$. При этом изометрия $f : F \to F_1$ порождает теперь тождественный диффеоморфизм $G \to G_1$. Пусть $\gamma \subset F$ - произвольная кривая, заданная уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, тогда ее образ $f(\gamma) \subset F_1$ будет задаваться теми же уравнениями. Так как f - изометрия, то длины произвольных дуг $[a, b]$ этих кривых равны

$$\int_a^b \sqrt{E_1u'^2 + 2F_1u'v' + G_1v'^2}dt = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2u'v' + Gv'^2}dt.$$

Так как a, b - произвольны, то из этого равенства следует равенство подынтегральных функций или $E_1u'^2 + 2F_1u'v' + G_1v'^2 = Eu'^2 + 2u'v' + Gv'^2$, а так как $\gamma \subset F$ выбрана произвольно, то последнее равенство будет выполняться лишь при $E_1 = E$, $F_1 = F$, $G_1 = G$. ■

Следствие. В соответствующих по изометрии точках поверхностей совпадают гауссовы кривизны этих поверхностей, так как по теореме Гаусса полная кривизна поверхности выражается через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. Отсюда следует, что соответствующие по изометрии точки имеют одинаковые типы: либо одновременно эллиптические, либо гиперболические, либо параболические, либо точки уплощения. Углы между соответствующими кривыми равны и так далее.

Деформация поверхности как гибкой нерастяжимой пленки с сохранением длин всех кривых этой поверхности называется **изгибанием поверхности.** Поверхности называются **наложимыми,** если одна из них переводится в другую изгибанием. Так как наложимые поверхности изометричны по определению, то их полные кривизны в соответствующих по изометрии точках равны.

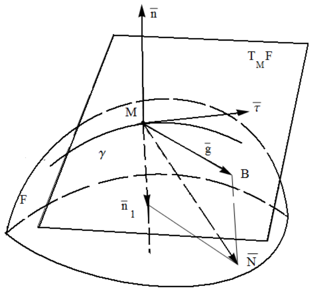
Примеры. 1). Координатную плоскость $F = XOY$ можно задать векторным уравнением $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $\overline{r}(u, v) = (u, v, 0)$. Так как $\overline{r}_u = (1, 0, 0)$, $\overline{r}_v = (0, 1, 0)$, то $I = du^2 + dv^2$. Прямой круговой цилиндр F_1 можно задать уравнением $\overline{r} = \overline{r}_1(u, v)$,

$\overline{r}_1(u,v) = (R\cos v, R\sin v, u)$. Так как $\overline{r}_{1u} = (0,0,1)$. $\overline{r}_{1v} = (-R\sin v, R\cos v, 0)$, то $I = du^2 + Rdv^2$. Сделаем замену переменной $v_1 = Rv$, (и обозначим v_1 снова через v), получим: $I = du^2 + dv^2$. Таким образом, сопоставляя на плоскости и цилиндре точки с одинаковыми криволинейными координатами, получим изометрию этих поверхностей (точнее не поверхностей в целом, а областей на них) в силу равенства первых квадратичных форм в соответствующих точках. В этом случае говорят, что цилиндр и плоскость локально изометричны.

2). Сферу F можно задать векторным уравнением $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, где $\overline{r}(u,v) = (R\cos v\cos u, R\cos v\sin u, R\sin u)$. Здесь v - широта, u - долгота точки сферы. В этой параметризации $I = R^2(\cos^2 v du^2 + dv^2)$ и нельзя понять, можно ли ее привести заменой параметров к первой квадратичной форме плоскости или нет. Воспользуемся следствием из теоремы 17.2. Так как полная кривизна сферы равна $K_c = \frac{1}{R^2}$, а полная кривизна плоскости $K_n = 0$, то сфера и плоскость не изометричны, нельзя наложить даже малый кусок сферы на плоскость. Поэтому, в частности, нельзя нарисовать плоскую карту земли с сохранением длин всех кривых.

16.3 Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Геодезические

Рассмотрим на поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$ гладкую кривую $\gamma \in F$. Пусть вектор $\overline{N}$ есть вектор кривизны кривой γ в точке $M \in \gamma$, $\overline{g} = \overline{MB}$, где B - проекция конца



вектора кривизны $\overline{N}$, отложенного от точки M на касательную плоскость $T_M F$. Вектор $\overline{g}$ называется **вектором геодезической кривизны** кривой $\gamma \subset F$ в точке M. Пусть $\overline{\tau}$ - единичный касательный вектор к γ в точке M, $\overline{n}$ - единичный вектор нормали к F в точке M. Тогда $\overline{g} \perp \overline{n}$, а, так как $\overline{N} \perp \overline{\tau}$, то и $\overline{g} \perp \overline{\tau}$ (теорема о трех перпендикулярах). Поэтому $\overline{g} || \overline{\tau} \times \overline{n}$. Число k_g такое, что

$$\overline{g} = k_g(\overline{\tau} \times \overline{n}) \tag{1}$$

называется **геодезической кривизной кривой** γ в M.

Кривая на поверхности называется **геодезической,** если геодезическая кривизна кривой в каждой ее точке равна нулю.

Из (1) видно, что $k_g = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{g} = \overline{0}$, поэтому γ - геодезическая тогда и только тогда, когда вектор кривизны $\overline{N}$ кривой γ параллелен вектору нормали $\overline{n}$ к поверхности F в каждой точке γ : $\overline{N} || \overline{n}$ (в этом случае проекция B совпадает с M).

Так, на сфере геодезическими будут большие круги (а малые - нет!).

Вычислительные формулы для k_g. Умножим (1) скалярно на векторное произведение $\overline{\tau} \times \overline{n}$, получим $k_g = \overline{g} \cdot (\overline{\tau} \times \overline{n})$. Пусть $\overline{n}_1 = \overline{MB}_1$, где B_1 - проекция конца вектора кривизны $\overline{N}$ на нормаль к поверхности F в точке M. Тогда $\overline{N} = \overline{g} + \overline{n}_1$, $\overline{g} = \overline{N} - \overline{n}_1$. Поэтому, можно записать: $k_g = \overline{g} \cdot (\overline{\tau} \times \overline{n}) = (\overline{N} - \overline{n}_1) \cdot (\overline{\tau} \times \overline{n}) = (\overline{N}, \overline{\tau}, \overline{n}) - (\overline{n}_1, \overline{\tau}, \overline{n})$. Смешанное произведение $(\overline{n}_1, \overline{\tau}, \overline{n})$ равно нулю, так как $\overline{n}_1 || n$. Таким образом, получаем $k_g = (\overline{N}, \overline{\tau}, \overline{n})$. Если $\overline{r} = \overline{r}(s)$ - естественная параметризация γ, то

$$k_g = (\overline{r}'', \overline{r}', \overline{n}). \tag{2}$$

Если $\overline{r} = \overline{r}(t)$ - произвольная параметризация кривой γ, то так же, как это делали в §15.7, запишем $\overline{r}' = \overline{r}'_s s'$, $\overline{r}'' = \overline{r}''_s (s')^2 + \overline{r}'_s s''$ и $s' = |\overline{r}'|$. Отсюда $\overline{r}'_s = \frac{\overline{r}'}{|\overline{r}'|}$, $\overline{r}''_s = \frac{\overline{r}''}{|\overline{r}'|^2} - \overline{r}'_s \frac{s''}{|\overline{r}'|^2}$. Подставим найденные производные в (2) и окончательно получим:

$$k_g = \frac{1}{|\overline{r}'|^3}(\overline{r}'', \overline{r}', \overline{n}).$$

Уравнения геодезических. Пусть $\gamma : u = u(s)$, $v = v(s)$ - геодезическая на поверхности $F : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, s - натуральный параметр кривой. Тогда $\overline{r} = \overline{r}(u(s), v(s))$ - естественная параметризация кривой γ. Найдем вектор кривизны $\overline{N}$ кривой γ : $\overline{\tau} = \overline{r}' = \overline{r}_u u' + \overline{r}_v v'$, $\overline{N} = \overline{\tau}' = \overline{r}_{uu} u'^2 + 2\overline{r}_{uv} u'v' + \overline{r}_{vv} v'^2 + \overline{r}_u u'' + \overline{r}_v v''$ и воспользуемся уравнениями (1) из §17.1: $\overline{N} = (\Gamma^1_{11}\overline{r}_u + \Gamma^2_{11}\overline{r}_v + L\overline{n})u'^2 + 2(\Gamma^1_{12}\overline{r}_u + \Gamma^2_{12}\overline{r}_v + M\overline{n})u'v' + (\Gamma^1_{22}\overline{r}_u + \Gamma^2_{22}\overline{r}_v + N\overline{n}) + \overline{r}_u u'' + \overline{r}_v v'' = (u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22})\overline{r}_u + (v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22})\overline{r}_v + (Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)\overline{n}$.

Так как γ - геодезическая, то $\overline{N} || \overline{n}$, что возможно лишь при равенстве нулю коэффициентов при $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$:

$$\begin{cases} u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2 = 0, \\ v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ясно, что решение этой системы $u(s)$, $v(s)$ задают геодезическую на поверхности F. Из общей теории систем дифференциальных уравнений следует, что для каждой точки $A \in F$, для каждого вектора $\overline{p}$ в $T_A F$ существует геодезическая $\gamma \subset F$, проходящая через A и касающаяся вектора $\overline{p}$, причем такая геодезическая единственна. Так, из единственности геодезической в данном направлении вытекает, что на сфере геодезическими будут большие круги и только они. На плоскости геодезическими будут прямые и только они.

16.4 Основное свойство геодезических на поверхности

Полугеодезическая параметризация поверхности. Пусть F - гладкая поверхность, $\gamma \in F$ - гладкая кривая, $M \in \gamma$. Существует параметризация $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$ поверхности F такая, что координатные линии $v = const$ есть геодезические, проходящие перпендикулярно кривой γ, а координатные линии $u = const$ - их ортогональные траектории. При этом γ является линией $u = u_0 = const$. Такая параметризация поверхности называется **полугеодезической.** Чтобы ее ввести, достаточно рассмотреть геодезические ортогональные γ - одно семейство кривых, и их ортогональные траектории - второе семейство, и воспользоваться леммой 16.1. Полугеодезическая параметризация вводится в некоторой окрестности линии γ, а не на всей поверхности.

Найдем первую квадратичную форму поверхности F в полугеодезической параметризации. Так как координатные линии $v = const$ - геодезические, то функция $v(t) = const$ удовлетворяет уравнениям геодезических. Так как $v' = v'' = 0$, то из второго уравнения (3) §17.3 получим $\Gamma^2_{11} = 0$. Из шести уравнений для определения коэффициентов $\Gamma^k_{ij} = 0$ (§17.1), возьмем уравнение $\Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = F_u - \frac{1}{2}E_v$. Подставим сюда $\Gamma^2_{11} = 0$ и $F = 0$ (так как координатные линии ортогональны), получим $E_v = 0$, то есть E есть функция только от u : $E = E(u)$. Таким образом, первая квадратичная форма поверхности с полугеодезической параметризацией примет вид:

$I = E(u)du^2 + G(u,v)dv^2$. Сделаем замену переменных по формулам $\overline{u} = \int \sqrt{E}du$, $\overline{v} = \int \sqrt{G(u_0,v)}dv$. Такая замена параметров является допустимой. Проинтегрировав, получим $\overline{u} = \overline{u}(u)$, $\overline{v} = \overline{v}(v)$, при этом, будем считать, что $\overline{u}(u_0) = \overline{u}_0$. Заметим, что координатные линии в новых переменных останутся те же. Разрешим уравнения $\overline{u} = \overline{u}(u)$, $\overline{v} = \overline{v}(v)$ относительно u и $v : u = u(\overline{u})$, $v = v(\overline{v})$ и подставим в I : $I = d\overline{u}^2 + \overline{G}(\overline{u},\overline{v})d\overline{v}^2$, где $\overline{G}(\overline{u},\overline{v}) = \frac{G(u(\overline{u}),v(\overline{v}))}{G(u(\overline{u}_0),v(\overline{v}))}$. При этом $\overline{G}(\overline{u}_0,\overline{v}) = \frac{G(u(\overline{u}_0),v(\overline{v}))}{G(u(\overline{u}_0),v(\overline{v}))} = 1$. Если дополнительно предположить, что кривая γ - геодезическая, то из уравнения геодезических, получим $\Gamma^1_{22} = 0$, а и из формул (2) §17.1 $\overline{G}_{\overline{u}}(\overline{u}_0,\overline{v}) = 0$.

Таким образом, в полугеодезической параметризации поверхности первая квадратичная форма имеет вид:

$$I = du^2 + G(u,v)dv^2, \tag{1}$$

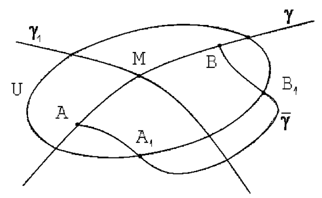
при этом $G(u_0,v) = 1$ и $G_u(u_0,v) = 0$, если γ геодезическая.

Наконец отметим, что параметр u является натуральным параметром на координатных линиях $v = const$, так как для длины s дуги такой кривой можно записать $s = \int \sqrt{u'^2 + G\,0}\,dt = \int du = u + C$.

Основная теорема. Определим "внутреннее" расстояние между точками A, B гладкой поверхности. Пусть $L(A,B)$ - множество длин всех кривых на поверхности с концами в точках A и B. Это множество ограничено снизу, поэтому существует $\inf L(A,B)$, который обозначим $\rho(A,B)$ и назовем расстоянием между точками A, B на поверхности F. Из определения расстояния непосредственно вытекают следующие свойства: 1). $\rho(A,B) = \rho(B,A)$. 2).$\rho(A,B) \leqslant \rho(A,C) + \rho(C,B)$, для любых точек $A, B, C \in F$. 3). $\rho(A,B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$. Следовательно, $\rho(A,B)$ - метрика на F. Расстояние позволяет определить, например, открытые круги U на поверхности F с центром в точке M_0 и радиуса $r : U = \{M|\rho(M_0,M) < r\}$. Границей круга U является окружность $\{M|\rho(M_0,M) = r\}$.

Теорема 16.3 *Пусть A, B - достаточно близкие точки на геодезической γ, принадлежащей поверхности F. Пусть L_{AB} - длина дуги геодезической с концами в точках A и B. Тогда $\rho(A,B) = L_{AB}$.*

■ Возьмем на геодезической γ точку M и введем в окрестности M полугеодезическую параметризацию, исходя из геодезической γ_1, пересекающей геодезическую γ ортогонально в точке M. Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малое, чтобы открытый круг $U \subset F$ с центром в точке M и радиусом больше ε принадлежал области, охваченной полугеодезической параметризацией. Возьмем точки $A, B \in \gamma$, лежащие в U и удаленные от M по кривой γ на расстоянии, меньшем $\frac{\varepsilon}{2}$. Покажем, что $L_{AB} = \rho(A,B)$. Для этого предположим, что дуга $\smile AB$ кривой γ не является кратчайшей и $\overline{\gamma}$ - кривая на поверхности, соединяющая точки A и B и имеющая длину **меньше,** чем L_{AB}. Сначала покажем, что $\overline{\gamma}$ проходит внутри круга U. Предположим противное. Пусть A_1, B_1 - первая и последняя точки пересечения γ с границей круга U. Имеем: $L_{MA} + L_{AA_1} \geqslant \rho(M,A_1) > \varepsilon$, $L_{MB} + L_{BB_1} \geqslant \rho(M,B_1) > \varepsilon$. Отсюда



$$L_{MA} + L_{AA_1} + L_{MB} + L_{BB_1} > 2\varepsilon, \tag{2}$$

Но, с другой стороны $L_{AA_1} + L_{BB_1} \leqslant L(\overline{\gamma}) \leqslant L_{MB} + L_{MA} \leqslant \varepsilon$, следовательно $L_{AA_1} + L_{BB_1} + L_{AM} + L_{MB} \leqslant 2\varepsilon$, что противоречит (2). Таким образом, $\overline{\gamma}$ целиком принадлежит U. Рассмотрим параметризацию $\overline{\gamma} : u = u(t),\ v = v(t),\ a \leqslant t \leqslant b$. Пусть $u_1 = u(a)$ - значение параметра u для точки A, $u_2 = u(b)$ - для точки B, при этом будем считать, что $u_1 \leqslant u_2$.

Найдем длину L кривой $\overline{\gamma}$. Так как первая квадратичная форма поверхности в полугеодезической параметризации имеет вид (1) и $\overline{\gamma}$ принадлежит U, то

$$L = \int_a^b \sqrt{u'^2 + Gv'^2}dt \geqslant \int_a^b \sqrt{u'^2}dt = \int_a^b |u'|dt \geqslant$$

$$\Big|\int_a^b u'dt\Big| = |u(b) - u(a)| = u_2 - u_1 = L_{AB}$$

так как u - есть длина дуги на кривой $\gamma : v = const$. Получили противоречие с выбором кривой $\overline{\gamma}$. Следовательно, для любой кривой $\overline{\gamma}$ с концами в точках A, B ее длина $L \geqslant L_{AB}$. Следовательно $\inf L(A,B) \geqslant L_{AB}$. С другой стороны, очевидно, что $L_{AB} \geqslant \inf L(A,B)$. Отсюда получаем, что $L_{AB} = \inf L(A,B) = \rho(A,B)$, что и требовалось доказать. ■

Таким образом, геодезические на малых своих участках играют роль отрезков в пространстве.

16.5 Поверхности постоянной полной кривизны

Напомним примеры поверхностей постоянной полной кривизны: сфера радиуса a с полной кривизной $K = \frac{1}{a^2}$ и первой квадратичной формой $I = du^2 + \cos^2\frac{u}{a}dv^2$, плоскость с полной кривизной $K = 0$ и $I = du^2 + dv^2$, псевдосфера радиуса $(-a)$ имеет полную кривизну $K = -\frac{1}{a^2}$ и $I = du^2 + ch^2\frac{u}{a}dv^2$.

Пусть теперь F - поверхность постоянной полной кривизны K. Выясним строение F в окрестности точки $M \in F$. Для этого введем в окрестности M полугеодезическую параметризацию, исходя из произвольной геодезической γ, проходящей через M. В этой параметризации первая квадратичная форма поверхности имеет вид: $I = du^2 + G(u,v)dv^2$, причем можно считать, что $G(0,v) = 1$, $G_u(0,v) = 0$. Из задачи §17.1 полная кривизна $K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$ или

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0. \tag{1}$$

Легко проверить, что функция

$$\sqrt{G} = \begin{cases} A\cos\frac{u+B}{a}, & K = \frac{1}{a^2} > 0, \\ Au + B, & K = 0, \\ Ach\frac{u+B}{a}, & K = -\frac{1}{a^2} < 0, \end{cases} \tag{2}$$

где A и B - произвольные константы, является решением (1), причем, других решений нет, как это следует из теории дифференциальных уравнений. Здесь $A \neq 0$ так как $G \neq 0$. Из (2) получим:

$$(\sqrt{G})_u = \frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{G}} = \begin{cases} -\frac{A}{a}\sin\frac{u+B}{a}, & K > 0, \\ A, & K = 0, \\ \frac{A}{a}sh\frac{u+B}{a}, & K < 0. \end{cases}$$

Отсюда и из требования $G_u(0,v)=0$ получим равенства:

$$\begin{array}{l} -\frac{A}{a}\sin\frac{B}{a}=0,\ \text{то есть}\ B=0,\quad K>0,\\ A=0,\quad K=0,\\ \frac{A}{a}sh\frac{B}{a}=0,\ \text{то есть}\ B=0,\quad K<0. \end{array} \tag{3}$$

Из (2), условия $G(0,v)=1$ и равенств (3):

$$\begin{array}{l} A\cos\frac{B}{a}=1,\ \text{то есть}\ A=1,\quad K>0,\\ B=1,\quad K=0,\\ Ach\frac{B}{a}=1,\ \text{то есть}\ A=1,\quad K<0. \end{array} \tag{4}$$

Найденные A, B подставим в (2) и получим

$$\sqrt{G}=\begin{cases} \cos\frac{u}{a},\ K>0,\\ 1,\ K=0,\\ ch\frac{u}{a},\ K<0. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, при $K>0$ первая квадратичная форма $I=du^2+\cos^2\frac{u}{a}dv^2$ и следовательно поверхность локально (в окрестности точки) изометрична сфере радиуса a. При $K=0$ первая квадратичная форма $I=du^2+dv^2$ и F локально изометрична плоскости, при $K<0$ первая квадратичная форма $I=du^2+ch^2\frac{u}{a}dv^2$ и F локально изометрична псевдосфере радиуса $-a$.

Таким образом, поверхности постоянной равной полной кривизны локально изометричны между собой.

16.6 Теорема Гаусса-Бонне

Пусть P - криволинейный многоугольник на элементарной гладкой поверхности F, стороны которого γ_i, $i=1,2,...,k$, есть гладкие кривые, образующие между собой углы α_i со стороны P. Пусть k_g - геодезическая кривизна кривой γ_i, K - полная кривизна поверхности.

Теорема 16.4 *Для криволинейного треугольника P справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\gamma_i}k_g ds+\sum_{i=1}^{k}(\pi-\alpha_i)=2\pi-\iint\limits_{\omega}Kd\sigma,$$

где $d\sigma$ - элемент площади, а интегрирование в правой части выполнено по области ω плоскости параметров, соответствующей многоугольнику P.

Доказательство теоремы выходит за рамки нашего курса (см. [14]).

Следствия. 1). Пусть P - криволинейный многоугольник на поверхности F ограниченный тремя геодезическими - геодезический треугольник. Так как $k_g=0$ на γ_i, то, применяя теорему, получим:

$$(\pi-\alpha_1)+(\pi-\alpha_2)+(\pi-\alpha_3)=2\pi-\iint\limits_{\omega}Kd\sigma$$

или

$$\iint\limits_{\omega} K d\sigma = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi.$$

Обозначим $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$ и назовем δ избытком геодезического треугольника. Тогда $\int_\omega K d\sigma = \delta$. Отсюда получаем, что на поверхности с гауссовой кривизной $K > 0$ (сфера, например) избыток положителен, то есть сумма углов геодезического треугольника больше суммы π - суммы углов плоского треугольника. На поверхности с $K = 0$ (плоскость, цилиндр) избыток $\delta = 0$, а на поверхности с $K < 0$ (псевдосфера, "седло") избыток $\delta < 0$.

2). Рассмотрим на сфере радиуса $R = a$ геодезический треугольник с одним углом $\alpha_1 = \pi$ и другими $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Применяя теорему, получим $\int_\omega K d\sigma = 2\alpha$. Так как $K = \frac{1}{a^2}$, то $S = 2a^2\alpha$, где S - площадь этого двуугольника.

17 Топология

17.1 Определение топологического пространства. Примеры

Топологией (**топологической структурой**) на непустом множестве X называется семейство[1] $\mathcal{J}$ подмножеств множества X такое, что

I. Любое объединение подмножеств из X, принадлежащих $\mathcal{J}$, есть множество, принадлежащее $\mathcal{J}$.

II. Пересечение любого конечного набора подмножеств множества X, принадлежащих $\mathcal{J}$, принадлежит $\mathcal{J}$.

III. Пустое множество $\emptyset$ и само X принадлежат $\mathcal{J}$.

Топологическим пространством называется множество X наделенное некоторой топологией $\mathcal{J}$. При этом пишут $(X, \mathcal{J})$ или просто X, если известна топология на X.

Пусть $(X, \mathcal{J})$ - топологическое пространство. Множество $U \in \mathcal{J}$ называется **открытым** множеством в топологии $\mathcal{J}$ или просто - **открытым**.

Множество $A \subset X$ называется **замкнутым**, если его дополнение $X \setminus A$ - открыто, то есть $X \setminus A \in \mathcal{J}$.

Окрестностью множества в топологическом пространстве называется любое содержащее его открытое множество. В частности, окрестность точки есть любое открытое множество, содержащее эту точку.

Примеры. 1). Пусть $X = \{a, b\}$. Рассмотрим семейство $\mathcal{J} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ подмножеств множества X. Тогда $\mathcal{J}$ - топология на X.

2). **Естественная топология евклидова пространства.** Пусть E^n - n-мерное евклидово пространство, $n = 1, 2, 3....$ Обозначим через $U(M_0, t) = \{M | |M_0M| < t\}$ открытый шар с центром в точке M_0 и радиуса $t > 0$.

Множество $F \subset E^n$ назовем **открытым**, если для любой точке $M \in F$ существует $t > 0$ такая, что $U(M, t) \subset F$.

Обозначим через $\mathcal{J}$ семейство всех так определенных открытых подмножеств пространства E^n и пустое множество. Покажем, что $\mathcal{J}$ есть топология на E^n, а опре-

[1]Здесь и далее слова "семейство", "подсемейство" заменяют термины "множество", "подмножество".

деленные выше открытые множества будут открытыми и в топологии $\mathcal{J}$. Проверим аксиомы топологического пространства.

I. Пусть $U_i \in \mathcal{J}$, $i \in \Lambda$, Λ - произвольное множество индексов, конечное или бесконечное. Пусть $B = \cup_{i\in\Lambda} U_i$. Покажем, что $B \in \mathcal{J}$. ■ Пусть $M \in B$ произвольная точка. Найдется $i_0 \in \Lambda$, такое, что $M \in U_{i_0}$. Так как U_{i_0} открыто, то найдется шар $U(M,t)$, $t > 0$, такой, что $M \in U(M,t) \subset U_{i_0} \subset B$. Таким образом, множество B вместе с каждой своей точкой содержит и открытый шар с центром в этой точке. Следовательно B открытое множество по определению. ■

II. Пусть $B = U_1 \cap U_2$, где $U_1, U_2 \subset \mathcal{J}$. Покажем, что $B \in \mathcal{J}$. ■ Пусть $M \in B$ произвольная точка. Тогда $M \in U_1$ и $M \in U_2$. Так как U_1, U_2 открыты, то найдутся шары $U(M,t_1) \subset U_1$ и $U(M,t_2) \subset U_2$. Пусть $t = \min(t_1,t_2)$. Тогда $M \in U(M,t) \subset U_1 \cap U_2 \subset B$. Таким образом, множество B вместе с каждой своей точкой содержит и открытый шар с центром в этой точке. Следовательно B открытое множество по определению. ■

III. Пустое множество $\emptyset \in \mathcal{J}$ по определению. Само $E^n \in \mathcal{J}$ так как вместе с каждой своей точкой содержит и открытый шар с центром в этой точке.

Введенная топология евклидова пространства называется **естественной топологией евклидова пространства.**

Шар $U(M,t)$ на евклидовой прямой E^1 - это открытые интервалы с центром в точке M и длины $2t$. Открытые множества на E^1 в естественной топологии - это множества которые вместе с любой своей точкой содержат и открытый интервал с центром в этой точке.

Отметим, что пересечение всех открытых интервалов вида $(-1 - \frac{1}{k}, 2 + \frac{1}{k})$, $k = 1, 2, 3...$, есть замкнутый интервал $[1, 2]$ и следовательно аксиому *II* нельзя усилить.

Шары $U(M,t)$ на евклидовой плоскости E^2 - это открытые круги плоскости. Множество, которое вместе с любой своей точкой содержат и открытый круг с центром в этой точке, будет открытым в естественной топологии на плоскости.

Лемма 17.1 *Открытое множество в естественной топологии есть объединение открытых шаров.*

■ Действительно, пусть U - открыто. Тогда для любой точке $M \in U$ найдется шар $U_M = U(M,t)$ такой, что $M \in U_M \subset U$. Так как все шары U_M принадлежат U, то $\cup_{M\in U} U_M \subset U$. С другой стороны, все точки U, как центры шаров U_M принадлежат таким шарам, значит, и их объединению, следовательно $U \subset \cup_{M\in U} U_M$. Отсюда получаем равенство $U = \cup_{M\in U} U_M$. ■

Далее, говоря о евклидовом пространстве, предполагаем, что оно наделено естественной топологией.

3). **Левая топология на прямой.** На прямой X рассмотрим семейство множеств $\mathcal{J}$ состоящее из все бесконечных левых интервалов $(-\infty, a)$, $a \in X$, и пустого множества $\emptyset$. Тогда $\mathcal{J}$ топология на X. Топология $\mathcal{J}$ на X называется **левой**.

Таким образом, на одном множестве может быть несколько топологий. Следующий пример показывает что на любом множестве можно ввести топологию.

4). Пусть X - множество. Топология $\mathcal{J} = \{X, \emptyset\}$ называется **антидискретной**, а топология $\mathcal{J}$ состоящая из всех подмножеств множества X называется **дискретной** топологией на множестве X.

Свойства замкнутых множеств.

Пусть $(X, \mathcal{J})$ топологическое пространство. Справедливы следующие утверждения.

I'. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.

II'. Пересечение любой системы замкнутых множества есть множество замкнутое.

III'. Пустое множество $\emptyset$ и само X замкнуты.

■ Докажем I', свойство II' доказывается аналогично. Пусть $\{A_\alpha\}$ - конечное семейство замкнутых подмножеств множества X. Тогда для всех α множество $X \setminus A_\alpha$ открыто. Отсюда и из формул двойственности

$$X \setminus \cup_\alpha A_\alpha = \cap_\alpha (X \setminus A_\alpha)$$

-открыты по аксиоме I. Следовательно $X \setminus \cup_\alpha A_\alpha$ - открыто, следовательно, $\cup_\alpha A_\alpha$ - замкнутое множество.

Так как $X = X \setminus \emptyset$, то X - замкнуто, а из равенства $\emptyset = X \setminus X$ следует, что и $\emptyset$ - замкнуто. ■

17.2 База топологии

Задать топологию на данном множестве - это значит описать все открытые множества в этой топологии. Оказывается для задания топологии на множестве X достаточно указать только некоторые подмножества, принадлежащие топологии, а не все открытые множества.

Подсемейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{J}$ называется **базой** топологии $\mathcal{J}$ на множестве X, если любое открытое множество можно получить как объединение некоторых множеств из $\mathcal{B}$. Так как пустое множество $\emptyset$ является открытым и содержит только само себя, то $\emptyset \in \mathcal{B}$.

Отметим, что база топологии сама не обязательно является топологией.

Пример. Базой естественной топологии в евклидовом пространстве E^n является семейство всех открытых шаров в E^n. Любое открытое множество, в силу леммы 18.1, есть объединение некоторых открытых шаров. При этом множество всех открытых шаров не образует топологии - объединение или пересечение двух шаров может не быть шаром.

Рассмотрим требования к подсемейству топологии необходимое, чтобы оно было базой.

Теорема 17.1 *Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{J}$ является базой топологии $\mathcal{J}$ на множестве X тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки x найдется множество $B \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B \subset U$.*

■ 1). Если $\mathcal{B}$ база топологии $\mathcal{J}$, то любая окрестность U точки x, как открытое множество, есть объединение некоторых множеств из $\mathcal{B}$. Значит найдется $B \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B \subset U$.

2). Пусть x - произвольная точка X, U - окрестность точки x. Найдется множество $B_x \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B_x \subset U$. Легко видеть, что $U = \cup_{x \in U} B_x$ (см. доказательство лемма 18.1). Следовательно $\mathcal{B}$ - база топологии $\mathcal{J}$. ■

Из этой теоремы следует, что базой естественной топологии евклидова пространства может быть множество всех открытых шаров с рациональными радиусами и центрами в точках с рациональными координатами. В качестве базы в E^n можно выбрать семейство всех прямоугольных параллелепипедов.

Теорема 17.2 *Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств множества X есть база некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда*

1). $X = \cup_{B\in\mathcal{B}} B$, $\emptyset \in \mathcal{B}$.

2). Для любых $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и любой точки $x \in B_1 \cap B_2$ существует элемент $B_x \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$.

■ 1. Пусть $\mathcal{B}$ - база топологии $\mathcal{J}$ на X, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$. По определению базы $B_1, B_2 \in \mathcal{J}$, следовательно $B_1 \cap B_2$ открыто, значит, $B_1 \cap B_2$ - окрестность точки x. По теореме 18.1 найдется множество $B_x \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$, что доказывает 2). Для доказательства 1) отметим, что X - открыто, значит есть объединение всех множеств базы. Пустое множество, как уже отмечалось, принадлежит базе топологии.

2. Пусть $\mathcal{B}$ - семейство подмножеств множества X, обладающее свойствами 1) и 2). Покажем, что $\mathcal{B}$ есть база некоторой топологии на X. Для этого обозначим через $\mathcal{J}$ всевозможные объединения множеств из $\mathcal{B}$. Покажем, что $\mathcal{J}$ - топология на X. Семейство $\mathcal{B}$ тогда будет базой этой топологии. Проверим аксиомы топологического пространства. Любое объединение множеств их $\mathcal{J}$ есть объединение множеств из $\mathcal{B}$ и значит принадлежит $\mathcal{J}$. Аксиома I топологического пространства выполняется. Проверим аксиому II. Пусть $U, V \in \mathcal{J}$. Покажем, что $U \cap V \in \mathcal{J}$. Пусть точка $x \in U \cap V$. По определению $\mathcal{J}$ найдутся множества $B_1 \in \mathcal{B}$, $B_2 \in \mathcal{B}$ такие, что $x \in B_1 \subset U$, $x \in B_2 \subset V$. По условию теоремы найдется множество $B_x \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2 \subset U \cap V$. Легко видеть, что $U \cap V = \cap_{x\in U\cap V} B_x$, то есть $U \cap V \in \mathcal{J}$. Таким образом, $\mathcal{J}$ - топология с базой $\mathcal{B}$. ■

Топологическое пространство $(X, \mathcal{J})$ называется топологическим пространством со счетной базой, если топология $\mathcal{J}$ имеет хотя бы одну базу, состоящую не более, чем из счетного числа множеств.

Естественная топология на прямой - топология со счетной базой. Дискретная топология на плоскости не имеет счетной базы.

17.3 Внутренность, замыкание, граница множества

Пусть $(X, \mathcal{J})$ - топологическое пространство, $F \subset X$ подмножество.

Точка $x \in F$ называется **внутренней** точкой множества F, если существует окрестность U точки x такая, что $U \subset F$.

Множество всех внутренних точек множества F называется **внутренностью** множества F и обозначается $intF$ или $\overset{\circ}{F}$.

Если множество F - открыто, то есть $F \subset \mathcal{J}$, то F есть окрестность любой своей точки и значит $F = intF$.

Точка x называется **внешней** к множеству F, если эта точка внутренняя для множества $X \setminus F$, то есть существует окрестность U точки x такая, что $x \in U \subset X \setminus F$.

Точка x называется точкой **прикосновения** множества F, если любая окрестность точки x содержит точки из F.

Множество $\overline{F}$ всех точек прикосновения множества F называется **замыканием** множества F.

Ясно, что $F \subset \overline{F}$ так как любая окрестность точки $x \in F$ содержит точку из множества F, например, x. Но, не обязательно $F = \overline{F}$, пример - открытый интервал.

Теорема 17.3 *Множество F замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием $F = \overline{F}$.*

■ 1. Пусть F - замкнуто. Значит $X \setminus F$ - открыто. Так как $X \setminus F$ открыто, то $X \setminus F$ есть окрестность любой своей точки и эта окрестность (то есть $X \setminus F$) не пересекает F. Поэтому $(X \setminus F) \cap \overline{F} = \emptyset$. Отсюда получаем, что $X \setminus (X \setminus F) \supset \overline{F}$ или $F \supset \overline{F}$. А так как $F \subset \overline{F}$, то получаем, что $F = \overline{F}$

2. Пусть $F = \overline{F}$. Покажем, что F - замкнуто. Ясно, что $X \setminus F = X \setminus \overline{F}$. Любая точка $x \in X \setminus F$ имеет окрестность $B_x \subset X \setminus \overline{F}$ так как $x \notin \overline{F}$. Легко видеть, что $X \setminus F = \cup_{x \in X \setminus F} B_x$ - открыто, следовательно F - замкнуто. ■

Точка x называется **граничной** точкой множества F, если любая ее окрестность имеет непустое пересечение как с F так и с $X \setminus F$. Множество всех граничных точек множества F называется **границей** множества F и обозначается bF.

Другими словами, точки x - граничная для F, если она есть точка прикосновения F и $X \setminus F$.

Теорема 17.4 $bF = \overline{F} \cap \overline{(X \setminus F)}$.

■ 1. Покажем, что $bF \subset \overline{F} \cap \overline{(X \setminus F)}$. Пусть $x \in bF$. Это значит, что любая окрестность точки x имеет непустое пересечение с F и $X \setminus F$, то есть $x \in \overline{F}$ и $x \in \overline{X \setminus F}$. Отсюда получаем, что $x \in \overline{F} \cap \overline{(X \setminus F)}$.

2. Покажем, что $bF \supset \overline{F} \cap \overline{(X \setminus F)}$. Пусть $x \in \overline{F} \cap \overline{(X \setminus F)}$. Тогда $x \in \overline{F}$ и $x \in \overline{X \setminus F}$. Следовательно любая окрестность точки x имеет непустое пересечение с F и $X \setminus F$. Это значит, что $x \in bF$. ■

Заметим, что $b(X \setminus F) = bF$ так как $X \setminus (X \setminus F) = F$ и поэтому $b(X \setminus F) = \overline{X \setminus F} \cap \overline{X \setminus (X \setminus F)} = \overline{X \setminus F} \cap \overline{F} = bF$.

Теорема 17.5 $\overline{F} = intF \cup bF$.

■ 1. Покажем, что $\overline{F} \subset intF \cup bF$. Пусть $x \in \overline{F}$. Это значит, что любая окрестность U точки x пересекается с F. Если найдется такая окрестность U, что $U \subset F$, то $x \in intF$, если для любой окрестности U, $U \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$, то $x \in bF$. Таким образом, $x \in intF \cup bF$.

2. Покажем, что $\overline{F} \supset intF \cup bF$. Пусть $x \in intF \cup bF$. Следовательно любая окрестность U точки x пересекается с F. Поэтому $x \in \overline{F}$. ■

Таким образом, если множество $F \subset X$, то $X = intF \cup bF \cup (X \setminus F)$.

Задача. Пусть $A = (-1, 1)$. Найти $intA$, bF, $\overline{A}$ в естественной и левой топологиях.

17.4 Индуцированная топология

Пусть $(X, \mathcal{J})$ - топологическое пространство, подмножество $A \subset X$. Обозначим через $\mathcal{T} = \{U \cap A | U \in \mathcal{J}\}$. Покажем, что семейство $\mathcal{T}$ есть топология на множестве A.

■ Обозначим через $\widetilde{U} = U \cap A$, для $U \in \mathcal{J}$. Проверим для $\mathcal{T}$ аксиомы топологического пространства.

I. Пусть $\widetilde{U} = \cup \widetilde{U}_i$, $\widetilde{U}_i \in \mathcal{T}$, а индекс i пробегает некоторое множество индексов, конечное или бесконечное. Покажем, что и $\widetilde{U} \in \mathcal{T}$. Так как $\widetilde{U}_i \in \mathcal{T}$, то существуют $U_i \in \mathcal{J}$ такие, что $\widetilde{U}_i = A \cap U_i$ для всех i. Поэтому $\widetilde{U} = \cup \widetilde{U}_i = \cup(A \cap U_i) = A \cap (\cup U_i) \in \mathcal{T}$ так как $\cup U_i \in \mathcal{J}$ по аксиоме I топологического пространства.

II. Пусть $\widetilde{U} = \widetilde{U_1} \cap \widetilde{U_2}$, где $\widetilde{U}_i \in \mathcal{T}$, $i = 1, 2$. Покажем, что $\widetilde{U} \in \mathcal{T}$. Найдутся $U_i \in \mathcal{J}$ такие, что $\widetilde{U}_i = A \cap U_i$, $i = 1, 2$. Отсюда $\widetilde{U} = \widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U_2} = (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2) \in \mathcal{T}$, так как $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{J}$ по аксиоме II топологического пространства.

III. $A = X \cap A \in \mathcal{T}$, $\emptyset = A \cap \emptyset \in \mathcal{T}$.

Таким образом $\mathcal{T}$ - топология на подмножестве A топологического пространства $(X, \mathcal{J})$.

Пусть $(X, \mathcal{J})$ - топологическое пространство, подмножество $A \subset X$. Топология $\mathcal{T}$ на подмножестве A называется **индуцированной,** если $\mathcal{T} = \{U \cap A | U \in \mathcal{J}\}$.

Топологическое пространство $(A, \mathcal{T})$ называется **топологическим подпространством** топологического пространства $(X, \mathcal{J})$, если $A \subset X$ и топология $\mathcal{T}$ индуцирована на множестве A топологией $\mathcal{J}$.

Пример. Пусть A - прямая на евклидовой плоскости E^2 с естественной топологией. Тогда индуцированной топологией на A будет естественная топология на прямой A.

17.5 Непрерывность и гомеоморфизм

Пусть $(X, \mathcal{J})$, и $(X', \mathcal{J}')$ два топологических пространства.

Отображение $f : X \to X'$ называется непрерывным в точке $x \in X$, если для любой окрестности $U' \ni f(x)$ найдется окрестность $U \ni x$ такая, что $f(U) \subset U'$ (или, что тоже самое, $U \subset f^{-1}(U')$). Отображение $f : X \to X'$ непрерывное в каждой точке множества X называется **непрерывным** на множестве X.

Пример. Рассматривая функцию $f(x)$ как отображение $E^1 \to E^1$ евклидовых прямых с естественной топологией, можно увидеть, что отображение непрерывности, данное выше, есть не что иное, как определение непрерывности функции одной переменной, сформулированное на языке "$\varepsilon - \delta$".

Теорема 17.6 *Пусть $(X, \mathcal{J})$, и $(X', \mathcal{J}')$ два топологических пространства. Отображение $f : X \to X'$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества из X' открыт в X.*

■ 1). Пусть для любого открытого множества $U' \in \mathcal{J}'$, его прообраз $f^{-1}(U') \in \mathcal{J}$. Покажем, что f непрерывно в точке $x \in X$. Пусть V' - произвольная окрестность точки $f(x)$. Тогда $f^{-1}(V')$ - открыто и содержит точку x. Таким образом, для любой окрестности V' точки $f(x)$ нашлась окрестность $f^{-1}(V')$ точки x такая, что $f(f^{-1}(V')) = V' \subset V'$. Таким образом, f - непрерывно в точке x, а так как точка x была произвольно взята, то f непрерывно на X.

2). Пусть отображение $f : X \to X'$ непрерывно и $U' \in \mathcal{J}'$. Покажем, что $f^{-1}(U')$ открыто в X. Возьмем точку $x \in f^{-1}(U')$. По определению непрерывности отображения f в точке x, для любой окрестности $f(x)$, например, U', найдется окрестность U_x точки x такая, что $f(U_x) \subset U'$ или $U_x \subset f^{-1}(U')$. Следовательно, любая точка $x \in f^{-1}(U')$ содержится в $f^{-1}(U')$ вместе с некоторой своей окрестностью U_x. Легко видеть (см. доказательство леммы 18.1, §1), что $f^{-1}(U') = \cup_{x \in f^{-1}(U')} U_x$ и поэтому открыто. ■

Следствие. Пусть X, Y, Z - топологические пространства и $f : X \to Y, g : Y \to Z$ - непрерывные отображения. Тогда $h = g \circ f : X \to Z$ непрерывно.

Отображение $f : X \to X'$ топологических пространств называется **гомеоморфизмом** (или **топологическим отображением**), если f - биективное отображение и отображения f и f^{-1} - непрерывны.

Топологические пространства X, X' называются **гомеоморфными,** если существует гомеоморфизм $f : X \to X'$.

Примеры. 1). Рассмотрим два отрезка (a, b), (c, d) как подпространства евклидовой прямой с естественной топологией. Отображение $f : (a, b) \to (c, d)$, определенное формулой $y = \frac{d-c}{b-a}(x - a) + c$, биективно и непрерывно в обе стороны. Следовательно, f - гомеоморфизм.

2). Отрезок (a, b) и луч l гомеоморфны (отрезок и луч рассматриваются как подпространства евклидовой прямой). Действительно, совместим луч с положительной полуосью оси x-ов, отрезок (a, b) отложим от начала координат на положительной полуоси y. Проектирование f отрезка (a, b) на луч l из точки $A(-1, b - a)$ будет гомеоморфизмом.

Аналогично можно показать, что открытый шар евклидова пространства и евклидово пространство гомеоморофны.

Задача. Будет ли тождественное отображение $id : X \to E^1$ гомеоморфизмом, если E^1 - прямая с естественной топологией, а X - прямая с левой топологией, с естественной топологией?

Отметим, что отношение гомеоморфности есть отношение эквивалентности на множестве топологических пространств. Тем самым, множество всех топологических пространств разбивается на классы эквивалентности гомеоморфных между собой топологических пространств. Каждый такой класс называется **топологическим типом**. Одной из основных задач топологии является классификация топологических типов пространств. Всякое свойство топологического пространства, инвариантное относительно гомеоморфизма (то есть, присущее всем топологическим пространствам одного топологического типа), называется топологическим свойством. Выявление и изучение топологических свойств - одна из важнейших задач топологии.

17.6 Вложение и погружение топологических пространств

Пусть $f : X \to X'$ - отображение, $A \subset X$. Отображение $f|_A : A \to X'$, определенное равенством $f|_A(x) = f(x)$ для всех $x \in A$, называется **сужением** отображения f на подмножество A.

Пусть $f : X \to X'$ есть отображение топологических пространств $(X, \mathcal{J})$ и $(X', \mathcal{J}')$. Так как $f(X)$ подмножество X', то на $f(X)$ возникает индуцированная топология $\mathcal{T}$ и $(f(X), \mathcal{T})$ - топологическое подпространство $(X', \mathcal{J}')$.

Отображение $f : X \to X'$ топологических пространств $(X, \mathcal{J})$ и $(X', \mathcal{J}')$ называется **вложением** пространства $(X, \mathcal{J})$ в $(X', \mathcal{J}')$, если f есть гомеоморфизм топологического пространства $(X, \mathcal{J})$ на топологическое подпространство $(f(X), \mathcal{T})$, где $\mathcal{T}$ топология на $f(X)$ индуцированная топологией $\mathcal{J}'$.

Отображение $f : X \to X'$ топологических пространств $(X, \mathcal{J})$ и $(X', \mathcal{J}')$ называется **погружением**, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что $f|_U : U \to X'$ есть вложение.

Всякое вложение есть погружение, обратное не всегда верно.

Примеры. Отображение $f : E^1 \to E^2$, определенное правилом $t \to (t, \sin(t))$ является вложением евклидовой прямой на плоскость в виде синусоиды, а отображение f, определенное правило $t \to (\cos(t), \sin(t))$ является погружением евклидовой прямой на плоскость. В последнем случае прямая "наматывается" на окружность единичного радиуса.

17.7 Отделимость, компактность, связность

Отделимость.

Топологическое пространство называется **отделимым** (или хаусдорфовым), если у любых двух различных точек пространства есть непересекающиеся окрестности.

Примером отделимого пространства является прямая с естественной топологией, а прямая с левой топологией не является отделимым пространством.

Отделимое топологическое пространство обладает рядом свойств. Приведем пример. Покажем, что в отделимом пространстве сходящаяся последовательность точек имеет единственный предел. Дадим определения.

Последовательность точек $\{a_i\}$, $i = 1, 2, 3, ...$, топологического пространства X сходится к точке $a \in X$, если для любой окрестности U точки a существует i_0 такое, что $a_i \in U$ для всех $i \geqslant i_0$.

Пусть X - отделимое топологическое пространство. Предположим, что сходящаяся последовательность точек $\{a_i\}$, $i = 1, 2, 3, ...$, имеет два различных предела $a_1, a_2 \in X$. Так как X - отделимо, то у точек a_1, a_2 существуют непересекающиеся окрестности U_1, U_2. С другой стороны, из сходимости данной последовательности к точке a_1 следует, что начиная с некоторого номера i_1 все точки последовательности принадлежат U_1. Аналогично, найдется номер i_2 начиная с которого все точки последовательности принадлежат U_2. Получаем противоречие - точки a_i, при $i > max(i_1, i_2)$, принадлежат непересекающимся множествам U_1 и U_2 одновременно.

Компактность. Семейство открытых множеств $\{X_\lambda\}$, λ принадлежит произвольному множеству индексов, называется **открытым покрытием** подмножества A топологического пространства X, если $A \subset \cup_\lambda X_\lambda$.

Подпокрытие - это подсемейство открытого покрытия топологического пространства, которое само является открытым покрытием. Открытое покрытие (или подпокрытие) называется конечным, если оно содержит конечное множество элементов, то есть открытых множеств.

Подмножество A топологического пространства X называется **компактным**, если любое открытое покрытие подмножества A содержит конечное подпокрытие. В частности, само топологическое пространство - компактно, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Пусть X - компактное топологическое пространство и $\{X_{\lambda\in\Lambda}\}$ (Λ - множество индексов) произвольное его открытое покрытие, то есть $X = \cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Тогда существует конечное подпокрытие $\{X_1, X_2, ..., X_k\} \subset \{X_\lambda\}$, такое, что $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k$.

Примеры. Замкнутый отрезок $[0, 1]$ есть компактное подмножество прямой с естественной топологией (теорема Гейне-Бореля). Множество A, состоящее из точек с целыми координатами на прямой с естественной топологией не является компактным, так как каждую точку можно заключить в открытый интервал так, что никакие два интервала не будут пересекаются. Из бесконечного открытого покрытия множества A такими интервалами нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Связность. Подмножество топологического пространства называется **связным,** если его нельзя представить в виде объединения двух открытых непересекающихся множеств.

Областью в топологическом пространстве называется открытое связное множество.

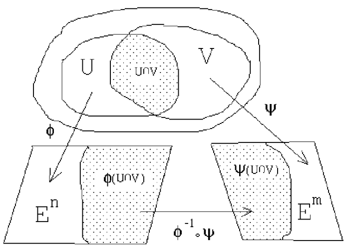
Свойства отделимости, компактности и связности являются топологическими инвариантами. Действительно, если $f : X \to X'$ гомеоморфизм и X - отделимое топологическое пространство (компактное, связное), то, легко видеть, что и X' будет отделимым (компактным, связным) топологическим пространством.

17.8 Определение топологического многообразия

Топологическим многообразием называется топологическое пространство каждая точка которого имеет окрестность гомеоморфную n-мерному евклидову пространству [1].

Натуральное n называется размерностью топологического многообразия X и обозначается $\dim X = n$. Так как открытый шар евклидова пространства гомеоморфен всему пространству, то в определении топологического многообразия вместо евклидова пространства можно взять n-мерные открытые шары. При $n = 2$ открытые шары - это открытые круги евклидовой плоскости, при $n = 1$ открытые шары - это открытые отрезки.

Теорема Брауэра утверждает, что если открытые подмножества из двух евклидовых пространств гомеомеорфны, то данные евклидовы пространства имеют одинаковую размерность. Из этой теоремы следует, что у данной точки x топологического многообразия не может существовать две окрестности U и V, такие, что U гомеоморфна n-мерному евклидову пространствам, а V гомеоморфна m-мерному евклидову пространствам и $m \neq n$. Если эти гомеоморфизмы обозначить через φ и ψ, то отображение $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ будет гомеоморфизмом открытых множеств евклидовых пространств E^n и E^m. Из теоремы Брауэра следует, что $m = n$ и определение топологического многообразия корректно.



Примеры. Гладкая элементарная поверхность F является топологическим многообразием, так как формулы (1) §16.1 определяют гомеоморфизм F и открытого прямоугольника плоскости. Открытый прямоугольник гомеоморфен плоскости. Простая поверхность F также есть топологическое многообразие, так как каждая точка простой поверхности имеет окрестность B такую, что $F \cap B$ - элементарная гладкая поверхность. В частности, евклидова плоскость, сфера есть топологические многообразия.

Обозначим через $E^n_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_n \geqslant 0\}$ - замкнутое полупространство евклидова пространства E^n. При $n = 2$ E^2_+ есть полуплоскость ограниченная осью x-ов и содержащая положительную полуось оси y.

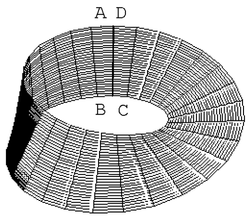
Топологическим многообразием с краем называется топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность либо гомеоморфную евклидову

[1]Всегда предполагается, что топологическое пространство имеет счетную базу и отделимо.

пространству E^n, либо полупространству E^n_+, но не имеет окрестности, гомеоморфной евклидову пространству E^n.

Натуральное n называется размерностью многообразия с краем.

Краем топологического многообразия называется множество всех его точек, имеющих окрестность гомеоморфную E^n_+, но не имеющих окрестности гомеоморфной E^n. Край многообразия X обозначается ∂X. Так как полупространство E^n_+ гомеоморфно замкнутому полушару, то в определении выше вместо полупространства E^n_+ можно указать замкнутый полушар. При $n = 2$, под замкнутым полушаром понимаем замкнутый полукруг (то есть полукруг вместе с ограничивающем его диаметром).



Лист Мебиуса

Примеры. 1). Замкнутая полусфера есть многообразие с краем. Краем является окружность, ограничивающая полусферу.

2). **Лист Мебиуса.** Возьмем квадрат с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ и $D(0,1)$. Отождествим ("склеим") точки с координатами $(0,y)$ и $(1,1-y)$, при $y \in (0,1)$. Получим скрученную ленту X, которая называется **листом Мебиуса**. Лист Мебиуса в индуцированной из евклидова пространства топологии является многообразием с краем. Край ∂X листа Мебиуса гомеоморфен окружности.

17.9 Клеточное разбиение двумерных многообразий. Ориентация двумерного многообразия

В следующем определении под многоугольником понимается компактная часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной. При этом многоугольник рассматривается как топологическое подпространство евклидовой плоскости.

Клеткой называется двумерное многообразие с краем гомеоморфное выпуклому многоугольнику. Образ вершины многоугольника называется **вершиной** клетки, образ стороны многоугольника - **стороной** клетки.

Двумерное топологическое многообразие X допускает **конечное клеточное разбиение** $\mathcal{P}$ на клетки $P_1, ..., P_k$, если

1). $X = \cup_{i=1}^k P_i$.

2). Любые две клетки P_i, P_j либо не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону.

Пусть X - двумерное многообразие, $\mathcal{P}$ - его клеточное разбиение. Вершины клеток разбиения называются **вершинами** разбиения $\mathcal{P}$, стороны клеток разбиения называются **ребрами** разбиения $\mathcal{P}$.

Пусть α_0 - число вершин разбиения $\mathcal{P}$, α_1 - число ребер разбиения $\mathcal{P}$ и α_3 - число клеток разбиения $\mathcal{P}$ двумерного многообразия X.

Число ("хи")

$$\chi(X) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

называется **эйлеровой характеристикой** двумерного многообразия X.

Теорема 17.7 *Эйлерова характеристика многообразия является топологическим инвариантом.*

■ Гомеоморфизм переносит клеточное разбиение с одного многообразия на другое без искажения. ■

Пример. Тетраэдр X есть двумерное топологическое многообразие, наделенное естественным клеточным разбиением. Для тетраэдра эйлерова характеристика $\chi(X) = 4-6+4 = 2$. Пусть S - сфера с центром в точке O. Поместим центр сферы O внутрь тетраэдра и спроектируем из точки O сферу на тетраэдр. Данная проекция будет гомеоморфизмом. Из теоремы 18.8 следует, что $\chi(S) = 2$. Эйлерову характеристику сферы можно найти и непосредственно, рассмотрев произвольное разбиение сферы на клетки.

Ориентация многообразия. Будем говорить, что клетка $ABCD...EF$ **ориентирована**, если задан обход границы клетки, например, от A к B, от B к C и так далее, от F к A. Клетку поэтому можно ориентировать двумя способами.

Пусть две клетки P_1 и P_2 ориентированы и имеют общую сторону AB. Если клетки P_1 и P_2 ориентированы так, что общую сторону AB в ориентации клеток надо проходить в противоположных направлениях, то клетки P_1 и P_2 называются **одинаково ориентированными**. В противном случае, клетки P_1 и P_2 **противоположно ориентированы.**

Двумерное многообразие X называется **ориентированным**, если существует такое конечное клеточное разбиение $\mathcal{P}$ многообразия X, клетки которого можно ориентировать так, что любые две клетки, имеющие общую сторону, будут одинаково ориентированы. Если такого клеточного разбиения многообразия X не существует, то многообразие X называется **неориентированным**.

Можно доказать, что если многообразие ориентируемо, то клетки любого его клеточного разбиения можно ориентировать так, что любые две клетки имеющие общую сторону будут одинаково ориентированы.

Поэтому для доказательства неориентируемости многообразия достаточно указать конкретное клеточное разбиение, у которого, при любой ориентации клеток, найдутся две клетки с общей стороной, которые не будут одинаково ориентированными.

Примеры. 1). Тетраэдр - ориентируемое двумерное многообразие. Клетки его естественного клеточного разбиения допускают требуемую ориентацию.

2). Лист Мебиуса - неориентируемое двумерное многообразие. Достаточно разбить лист Мебиуса на три клетки и рассмотреть всевозможные их ориентации.

Теорема 17.8 *Пусть F - простая ориентируемая поверхность. Тогда*

$$\iint\limits_F K d\sigma = 2\pi\chi(F), \tag{1}$$

где $d\sigma$ - элемент площади, а интегрирование в левой части выполнено по поверхности F.

■ Пусть $P_1, ..., P_{\alpha_2}$- клеточное разбиение поверхности F такое, что любые две клетки, имеющие общую сторону, будут одинаково ориентированы, α_2 - число клеток данного разбиения поверхности F. Пусть α_0 - число вершин, α_1 - число ребер данного разбиения поверхности F. Для каждой клетки P_k запишем теорему Гаусса-Бонне

$$\sum_{i=1}^{m_k} \int\limits_{\gamma_i^{(k)}} k_g^{(k)} ds + \sum_{i=1}^{m_k} (\pi - \beta_i^{(k)}) = 2\pi - \iint\limits_{P_k} K d\sigma$$

или

$$\sum_{i=1}^{m_k} \int\limits_{\gamma_i^{(k)}} k_g^{(k)} ds + m_k\pi - \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i^{(k)} = 2\pi - \iint\limits_{P_k} K d\sigma,$$

где m_k - число сторон клетки P_k, $\beta_i^{(k)}$ угол между сторонами клетки, $k_g^{(k)}$ - геодезическая кривизна стороны клетки, $k = 1, 2, ..., \alpha_2$. При этом интегрирование геодезической кривизны идет вдоль направления ориентации клетки. Просуммируем эти равенства для всех клеток. Сумма всех интегралов от геодезической кривизны будет равна нулю, так как по каждому ребру разбиения интеграл вычисляется дважды, со стороны каждой клетки, при этом интегрирование идет в разных направлениях. Сумма всех сторон всех клеток будет в два раза больше суммы всех ребер разбиения, сумма всех углов клеток будет равна числу полных углов в вершинах разбиения, то есть $2\pi\alpha_0$. Слагаемое 2π в правой части при суммировании повторится α_2 раза. В результате получим

$$2\pi\alpha_1 - 2\pi\alpha_0 = 2\pi\alpha_2 - \iint\limits_{F} K d\sigma,$$

что соответствует формуле (1). ■

Теорема 17.9 *Эйлерова характеристика многообразия не зависит от клеточного разбиения.*

■ Доказательство для простых поверхностей следует из равенства (1). Действительно, левая часть в (1) не зависит от клеточного разбиения, значит и правая часть не зависит от клеточного разбиения поверхности. ■

Теорема 17.10 *Ориентируемость двумерного многообразия есть топологический инвариант.*

■ Гомеоморфизм переносит клеточное разбиения и ориентацию с одного многообразия на другое. ■

Пример. Сфера - ориентируемое многообразие, так как сфера и тетраэдр гомеоморфны.

17.10 Теорема Эйлера для многогранников. Классификация правильных многогранников

Будем рассматривать многогранники гомеоморфные сфере. Такими многогранниками являются и выпуклые компактные многогранники, то есть многогранники, ограничивающие выпуклые подмножества пространства.

Пусть α_0 - число вершин, α_1 - число ребер, α_2 - число граней многогранника P. Так как эйлерова характеристика сферы равна 2, а многогранник P гомеоморфен сфере, то эйлерова характеристика P равна 2, то есть $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ или

$$\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2.$$

Это равенство и есть теорема Эйлера о многогранниках, гомеоморфных сфере: во всяком многограннике гомеоморфном сфере сумма числа вершин и граней на две единице больше числа сторон.

Многогранник называется **топологически правильным**, если все его грани имеют одно и то же число вершин, а многогранные углы одно и то же число граней.

Сколько существует таких правильных многогранников?

Пусть многогранник P - топологически правильный. Пусть каждая его грань имеет n вершин, а каждый многогранный угол имеет g граней.

Каждое ребро P есть сторона двух граней, а грань имеет n сторон, поэтому

$$n\alpha_2 = 2\alpha_1. \tag{1}$$

Каждая вершина есть конец g ребер, значит

$$g\alpha_0 = 2\alpha_1. \tag{2}$$

Из (1) и (2): $\alpha_0 = \frac{2\alpha_1}{g}$, $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{n}$. Из теоремы Эйлера

$$(\frac{2}{g} + \frac{2}{n} - 1)\alpha_1 = 2. \tag{3}$$

Отсюда

$$\frac{2}{g} + \frac{2}{n} > 1. \tag{4}$$

Из геометрических соображений $g \geqslant 3$, $n \geqslant 3$. Из (4)

$$\frac{2}{g} > 1 - \frac{2}{n} \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно $g < 6$. Аналогично $n < 6$. Таким образом, $n, g = 3, 4, 5$.

Возможны следующие варианты значений n и g, не противоречащие неравенству (4):

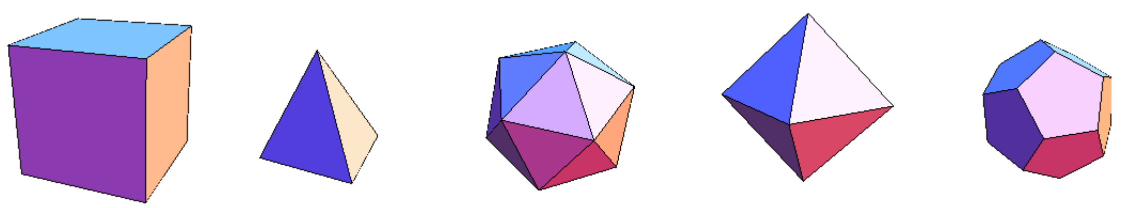
1). $g = n = 3$. Из равенства (3): $\alpha_1 = 6$, из (1), (2): $\alpha_0 = \alpha_2 = 4$. Многогранник с такими свойствами есть тетраэдр.

2). $g = 3$, $n = 4$. Из (3): $\alpha_1 = 12$, из (1), (2): $\alpha_0 = 8$, $\alpha_2 = 6$. Такой многогранник называется **гексаэдром** или кубом.

3). $g = 4$, $n = 3$. Из (3): $\alpha_1 = 12$, из (1), (2): $\alpha_0 = 6$, $\alpha_2 = 8$. Такой многогранник называется **октаэдром**.

4). $g = 3$, $n = 5$. Из (3): $\alpha_1 = 30$, из (1), (2): $\alpha_0 = 20$, $\alpha_2 = 12$. Такой многогранник называется **додекаэдром**.

5). $g = 5$, $n = 3$. Из равенства (3): $\alpha_1 = 30$, из (1), (2): $\alpha_0 = 12$, $\alpha_2 = 20$. Такой многогранник называется **икосаэдром**.



гексаэдр **тетраэдр** **икосаэдр** **октаэдр** **додекаэдр**

Таким образом, существует всего пять типов топологически правильных многогранников.

Часть V
Основания геометрии

Основания геометрии это раздел геометрии, в котором исследуются основные понятия геометрии, соотношения между ними и связанные с ними вопросы.

18 Геометрия от Евклида до наших дней

18.1 Развитие геометрии до Евклида

Первые геометрические результаты были получены развитыми цивилизациями Востока (Египет, Индия, Китай). До нас дошли египетские папирусы, относящиеся ко II тысячелетию до нашей эры, из которых следует, что египтянам были известны правила, относящиеся главным образом к измерению площадей и объемов некоторых фигур. Правила носили эмпирический характер и были связаны с удовлетворением жизненных потребностей в измерении площадей, строительстве и торговле. Никаких доказательств утверждений, установлений логических связей между утверждениями не проводилось.

В VII в. до н. э. геометрические знания в результате торговых связей проникли из Египта в Грецию и получили дальнейшее развитие в трудах греческих ученых и философов. За три столетия греки преобразовали геометрию в строгую теоретическую науку и сделали неизмеримо больше, чем египтяне в течение нескольких тысячелетий. Развитие греческой математики до Евклида можно разделить на три периода. Первый период относится к $VII - VI$ в. до н. э. и связан с ионийской школой в Малой Азии, главным представителем которой был Фалес Милетский. Геометрия в этот период из собрания разрозненный и эмпирических фактов стала превращаться в науку. Греки впервые стали логически доказывать отдельные утверждения геометрии в общем виде. Милетской школе приписывается доказательства следующих теорем:

- угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, прямой;
- диаметр делит круг на две равные части;
- вертикальные углы равны;
- углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой;
- треугольник определяется одной стороной и прилежащими к ней углами.

Так было заложено начало дедуктивному или аксиоматическому методу в геометрии.

Второй период ($VI - V$ в. до н. э.) относится к деятельности Пифагора и его школы. Результатом деятельности его школы является доказательство следующих важнейших утверждений:

- сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам;
- площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах (теорема Пифагора).

Пифагору приписывается открытие геометрического способа решения квадратных уравнений, построение многоугольника, равновеликого данному, понятие пропорции; рассматривались вопросы спрямления окружности, квадратуры круга, вопросы связанные с вычислением объемов пирамид и круглых тел, разрабатывались такие геометрические понятия как точка, линия, поверхность, движение и многое другое. Важными открытиями школы Пифагора было открытие существования несоизмеримых отрезков, учение о бесконечности.

Третий период (IV в. до н. э.) связан с деятельностью философских школ Платона и Аристотеля в Афинах. Со школами Платона и Аристотеля связывают два основных достижения: разработку основных принципов научного построения геометрии, разделение геометрической системы на аксиомы, теоремы, определения и разработку методов и форм доказательства - анализ, синтез, доказательство от противного.

К концу III в. до н. э. был накоплен многочисленный математический материал и назрела необходимость создания систематического руководства по геометрии. Такую задачу пытались решить многие греческие геометры (Гиппократ, Федий, Магнезий и другие), но их сочинения не дошли до нашего времени, были забыты после появления "Начал" Евклида.

Евклид жил в Александрии (Египет) в 330-275 г. до н. э. Из биографических сведений до наших дней дошло только несколько недостоверных рассказов об Евклиде. Из работ, написанных Евклидом, главным произведением являются "Начала". До нас дошли так же его сочинения "Данные", "О делении фигур", "Оптика" и один астрономический трактат.

"Начала" Евклида состоят из 13 книг. Из них 1-6 посвящены планиметрии, 7-9 - арифметике, 10 - несоизмеримым величинам, 11-13 - стереометрии. Первая книга содержит учение об отрезках, о сторонах и углах треугольника, о построении треугольников, о перпендикулярных и параллельных прямых, о параллелограммах, о площадях треугольников и параллелограммов и теорему Пифагора. Вторая книга посвящена вопросам геометрической алгебры, в частности, в ней рассматривается геометрическое решение квадратного уравнения. В третей книге изложено учение об окружности и круге, о секущих и касательных, о степени точки относительно окружности. Четвертая книга посвящена учению о вписанных и описанных многоугольниках, построению правильных многоугольников. В пятой книге содержится учение Евдокса о пропорции. Приложение учения о пропорциях дается в 6 книге, где излагается учение о подобных фигурах. В арифметических книгах Евклид строго придерживается принципа разделения учения о числах и учения о геометрических величинах. В этих книгах Евклид, в частности, излагает знаменитый алгоритм нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. В 10 книге Евклид рассматривает несоизмеримые величины. Остальные книги посвящены основам стереометрии, учению о многогранниках.

Каждая из 13 книг "Начал" открывается списком основных предложений, необходимых для вывода всех утверждений данной книги. Начальные предложения делятся на на три категории - определения, аксиомы и постулаты. Так, первая книга "Начал" открывается 23 определениями, после чего следуют постулаты и аксиомы. Приведем список некоторых определений, аксиом и постулатов.

Определения.

1. Точка есть то, что не имеет частей.

2. Линия есть длина без ширины.

3. Граница линии суть точка.

4. Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.

5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

...

17. Диаметр круга есть прямая, проходящая через центр, и ограниченная с обеих сторон окружностью; она разделяет круг пополам.

23. Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости, и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той ни с другой стороны между собой не встречаются.

Постулаты.

I. Чтобы из каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжать неограниченно.

III. И чтобы из каждой точки, как из центра, можно было произвольным радиусом описать окружность.

IV. И чтобы все прямые углы были равны друг другу.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы.

1. Равные порознь третьему равны между собой.
2. И если к равным прибавим равные, то получим равные.
3. И если от равных отнимем равные, то получим равные.
4. И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.
5. И если удвоим равные, то получим равные.
6. И половины равных равны между собой.
7. И совмещающиеся (величины, образы) равны между собой.
8. И целое больше части.
9. И две прямые линии не могут заключать пространство.

После основных предложений Евклид излагает теоремы геометрии так, чтобы каждую теорему можно было доказать, используя только предыдущие теоремы, постулаты и аксиомы.

Книги "Начала" Евклида оставались учебником по геометрии более двух тысячелетий и с 1482 г. выдержали свыше 500 изданий на всех языках мира. "Начала" Евклида послужили источником многочисленных идей, без которых современная математика не могла бы существовать. Книги Евклида послужили началом для обсуждения вопросов обоснования геометрии - тех понятий и методов, которые лежат в основании геометрии.

Критика аксиом Евклида. Многие определения Евклида, например 1-3 и другие, не являются удовлетворительными с современной точки зрения. В определении основных объектов геометрии такие понятия как "длина", "ширина", "часть" сами нуждаются в определении. Надо отметить, что сам Евклид нигде не использует определения 1-7 в своих книгах. Некоторые термины, используемые в определениях, неточны и допускают неоднозначное трактование. Некоторые определения содержат лишние утверждения. Так, в определении 17 можно опустить вторую часть - утверждение о делении круга диаметром пополам можно доказать.

Постулаты и аксиомы Евклида составляют основу доказательств теорем. Евклид не объясняет различие между постулатами и аксиомами и до сих пор нет единого мнения на этот счет. Поэтому все постулаты и аксиомы можно называть аксиомами. Важнейшим недостатком аксиом Евклида является их неполнота. Некоторые доказательства опирались на чертеж - для строгого обоснования не хватало аксиом и постулатов. Неполнота системы аксиом Евклида была отмечена еще в древности. Архимед (287-212 г. до н. э.) и Г.Кантор (1845-1918 г.) расширили систему аксиом Евклида, добавив аксиомы (названные аксиомами непрерывности), позволяющие обосновать понятия длины отрезка и площади многоугольника.

С другой стороны, IV постулат оказался лишним - его можно доказать как теорему, опираясь на остальные аксиомы и постулаты.

Система аксиом Евклида не содержала аксиом, описывающих порядок расположения точек на прямой. Эта группа аксиом впервые была разработана немецким математиком М.Пашем в 1892 г.

Многие доказательства о равенстве фигур Евклид проводит методом наложения. Это значит, что понятие равенства (конгруэнтности) фигур основано на понятии движения или совмещения (аксиома 7). Само движение нигде у Евклида не определяется.

18.2 Проблема V постулата

В построении элементарной геометрии V постулат Евклида играет фундаментальную роль. На нем основаны теории параллельности прямых и все связанные с ней разделы - подобия фигур, тригонометрия.

Если остальные аксиомы и постулаты используются в начале книги Евклида, то V постулат применяется при доказательстве 29-го предложения и все теоремы геометрии можно разделить на две части в одних теоремах применяется V постулат, в других - нет.

Укажем важнейшие теоремы планиметрии, при доказательстве которых не используется пятый постулат.

1). Каждый отрезок (угол) можно единственным образом разделить пополам.

2). Через каждую точку можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой.

3). Сумма двух смежных углов равна $2d$[1].

4). Все прямые углы равны между собой.

5). Вертикальные углы равны.

6). В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой.

7). Перпендикуляр короче наклонной.

8). Внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного.

9). Во всяком треугольнике не может быть более одного прямого или тупого угла.

10). В треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Верно и обратное утверждение.

11). Сумма двух сторон треугольника больше третьей.

12). Три признака равенства треугольника.

13). Два перпендикуляра к третьей прямой не пересекаются.

[1] $d = \frac{\pi}{2}$.

14). Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит прямая, не пересекающая данную прямую.

15). Сумма углов треугольника меньше или равна $2d$.

16). Если точки лежат по разные стороны от прямой, то отрезок, их соединяющий, пересекает прямую.

17). Если луч проходит через вершину треугольника внутри его, то он пересекает противоположную сторону треугольника.

18). Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника.

19). В треугольник можно вписать единственную окружность.

20). Прямая пересекает окружность не более чем в двух точках.

21). Равные дуги окружности стягиваются равными хордами. Верно и обратное утверждение.

22). Если выбрать отрезок (угол) в качестве единичного, то любому отрезку (углу) можно поставить в соответствие действительной число, называемое его длинной (величиной угла).

Отметим, что среди этих важных теорем фундаментальную роль играет теорема о внешнем угле треугольника - на эту теорему будем неоднократно ссылаться.

Евклид выделил пятый постулат - его формулировка громоздка и больше напоминает формулировку теоремы, чем постулата. Это обстоятельство породило многочисленные попытки доказать V постулат Евклида, вывести его из остальных аксиом и постулатов. На протяжении более двух тысяч лет многие математики и не математики[1] пытались доказать пятый постулат Евклида. Основная ошибка всех "доказательств" заключалась в применении в доказательстве утверждения равносильного пятому постулату.

Приведем примеры утверждений равносильных пятому постулату Евклида.

1). Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым.

2). **Аксиома параллельности**[2]. Через точку A, не принадлежащую прямой a, проходит единственная прямая, не пересекающая прямую a.

3). Сумма внутренних углов треугольника одна и та же для всех треугольников.

4). Точки, равноудаленные от данной прямой и расположенные в данной полуплоскости, образуют прямую.

5). Если две прямые не пересекаются, то расстояние от точек одной прямой до другой прямой ограничено.

6). Существуют треугольники с произвольно большой площадью.

7). Существуют подобные и неравные треугольники.

8). Через любую точку внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла.

9). Через три точки плоскости, не лежащих на одной прямой, проходит окружность.

10). Сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу описанной окружности.

Равносильность понимается так: если в аксиомах Евклида заменить пятый постулат одним из утверждений 1)-10), то все остальные утверждения можно доказать,

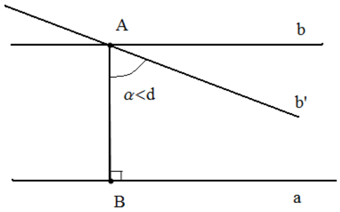
[1] Случается и сейчас - кафедра математики того или иного вуза получает на рецензию "доказательство" пятого постулата.

[2] Введена английским ученым Д.Плейфером в 1795 г.

основываясь на измененной системе аксиом Евклида. Приведем пример.

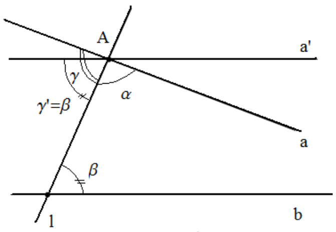
Теорема 18.1 *Пятый постулат Евклида равносилен аксиоме параллельности.*

■ 1). Пусть пятый постулат Евклида имеет место. Докажем, что через точку A, не принадлежащую данной прямой a, проходит единственная прямая, не пересекающая a. Пусть $AB \perp a$, $B \in a$. Пусть прямая b проходит через A и прямая $b \perp AB$. Тогда



прямые a и b не пересекаются. Если бы эти прямые пересеклись в точке C, то в треугольнике ABC внешний угол при вершине A был бы равен внутреннему углу при вершине B. Пусть прямая b' проходит через точку A и не совпадает с b. Тогда $b' \not\perp AB$, и значит прямая b' образует с перпендикуляром AB угол $\alpha < d$, где $d = \frac{\pi}{2}$. Применяем пятый постулат Евклида к прямым b' и a. Эти прямые образуют внутренние односторонние углы с AB, сумма которых равна $\alpha + d < 2d$. По пятому постулату прямые a и b' пересекаются. Следовательно, прямую a не пересекает только одна прямая b.

2). Пусть выполняется аксиома параллельности. Докажем утверждение пятого



постулата. Пусть прямая l пересекает прямые a и b и образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше $2d$. Покажем, что прямые a и b пересекаются с той же стороны. Проведем через точку A прямую a' так, чтобы она составляла с прямой l угол $\gamma' = \beta$, как на рисунке. Пусть γ - смежный угол с углом $\alpha : \alpha + \gamma = 2d$. Так как $\alpha + \beta < 2d$, то отсюда получаем, что $\beta < \gamma$. Поэтому $a' \neq a$. Но прямая a' не пересекает прямую b (в противном случае было бы противоречие с утверждением теоремы о внешнем угле треугольника). По аксиоме параллельности прямая a пересекает прямую b, причем с той стороны, где сумма углов $\alpha + \beta < 2d$. ■

Ближе всего к решению проблемы V постулата стояли И.Саккери (1667-1733), И.Ламберт (1728-1777) и А.Лежандр (1752-1833). Они пытались доказать V постулат Евклида методом от противного - предполагали, что имеет место отрицание пятого постулата и пытались прийти к какому-нибудь противоречию. Если бы V постулат вытекал из остальных аксиом и постулатов Евклида, то предполагаемое наличие V постулата и его отрицания сказалось бы когда-нибудь в некотором наглядном противоречии.

В центре построений Саккери лежит четырехугольник (четырехугольник Саккери) $ABCD$ с равными боковыми сторонами и равными прямыми углами при основании $\angle A = \angle D = d$. Так как прямая, перпендикулярная основанию и проходящая через середину основания, является осью симметрии четырехугольника, то углы при верхнем основании равны $\angle B = \angle C$. Саккери рассматривал три варианта: а) $\angle B = d$, б) $\angle B$ - острый угол, в) $\angle B$ - тупой угол. Гипотеза в) привела к противоречию, утверждение а) равносильно пятому постулату. Рассматривая гипотезу острого угла, Саккери стал получать странные результаты - параллельные прямые имеют либо только один общий перпендикуляр и расходятся от него в обе стороны, либо не имеют ни одного общего перпендикуляра и сближаются неограниченно в одном направлении и расходятся в другом. Доказав несколько десятков подобных теорем, Саккери ошибочно пришел к противоречию и заключил, что проблема V постулата решена.

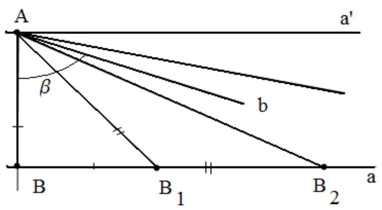
Ламберт рассматривал четырехугольник у которого три угла прямые, а относительно четвертого угла он сделал такие же предположения, что и Саккери. Гипотеза тупого угла привела Ламберта к противоречию, предположение прямого угла равносильно V постулату, на пути опровержения гипотезы острого угла Ламберт, подобно Саккери, получил сложную геометрическую систему. Однако, несмотря на то, что эта система была далеко развита Ламбертом, ему не удалось встретить в ней логическое противоречие, и он пришел к выводу, что и дальнейшие попытки не приведут к цели. Рассматривая гипотезу острого угла, Ламберта получил, в частности, формулу для площади треугольника. Оказалось, что площадь треугольника пропорциональна разности между $2d$ и суммой углов треугольника. Ламберт обнаружил аналогию геометрической системы со сферической геометрией и высказал предположение, что гипотеза острого угла выполняется на мнимой сфере.

Лежандр на пути доказательства V постулата так же как и Саккери и Ламберт рассмотрел три гипотезы о сумме углов треугольника: сумма углов треугольника равна $2d$, сумма углов треугольника $< 2d$, и сумма углов треугольника $> 2d$. Гипотеза тупого угла привела Лежандра к противоречию. Далее он пытается прийти к противоречию, рассматривая гипотезу острого угла. На этом пути он получает неверное доказательство одной из своих теорем, используя утверждение, эквивалентное пятому постулату. Положительный итог работы Лежандра содержится в следующих утверждениях.

Теорема 18.2 *Если сумма углов треугольника равна $2d$, то имеет место V постулат Евклида.*

Доказательство обратного утверждения рассматривалось в школьном учебнике геометрии.

■ Пусть точка A не принадлежит прямой a, отрезок $AB \perp a$, $B \in a$. Прямая a', проходящая через точку A перпендикулярно отрезку AB, не пересекает прямую a. Покажем, что всякая другая прямая b, проходящая через точку A, пересекает



прямую a. Пусть прямая b образует острый угол β с лучом AB. Возьмем точки B_1, $B_2, \ldots$ такие, чтобы $AB \equiv BB_1$, $B_1B_2 \equiv AB_1, \ldots$, $B_{n-1}B_n \equiv AB_{n-1}$. Так как сумма углов треугольника равна $2d$ и треугольник ABB_1 равнобедренный, то $\angle BAB_1 = \angle AB_1B = \frac{d}{2}$. Угол $\angle AB_1B$ - внешний угол треугольника AB_1B_2, поэтому $\angle AB_2B_1 = \frac{d}{4}$ и так далее, $\angle AB_nB_{n-1} = \frac{d}{2^n}$. Отсюда получаем, что $\angle BAB_n = d - \frac{d}{2^n}$. По условию $\beta < d$, поэтому при достаточно большом n выполняется неравенство $d - \frac{d}{2^n} > \beta$. Получим, что прямая b проходит внутри угла BAB_n и значит пересекает отрезок BB_n, то есть прямую a. ■

Приведем без доказательства еще одну теорему.

Теорема 18.3 *Сумма углов треугольника $\leqslant 2d$. Если в одном треугольнике сумма его углов равна $2d$ $(< 2d)$, то это имеет во всяком треугольнике.*

18.3 Создание неевклидовой геометрии. Н.И.Лобачевский

Решение проблемы V постулата было получено почти одновременно и независимо друг от друга профессором Казанского университета Николаем Ивановичем Лобачевским (1792-1856), великим немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом (1777-1855) и венгерским офицером Яношем Бояи (1802-1860). Решение заключалось в признании независимости пятого постулата Евклида от остальных аксиом и постулатов и создании новой геометрии, основанной на замене пятого постулате его отрицанием. Такое решение получил Я.Бояи в 1823 г., но опубликовал его только в 1832 г. (позже Лобачевского). Ф.Гаусс только в своих письмах указывал на существование такой геометрии, у него не было публикаций по этой теме. Основная заслуга в создании неевклидовой геометрии принадлежит Н.И.Лобачевскому.

Н.И.Лобачевский родился 1 декабря 1792 года в Нижнем Новгороде. В 1807 г. стал студентом Казанского университета, успешно закончил его в 1811 году и был оставлен при университете на преподавательской должности. До конца жизни он был связан с Казанским университетом. В 1816 году Н.И.Лобачевский был избран профессором университета, с 1827 по 1846 год он ректор университета, а с 1846 по 1855 год - попечитель Казанского учебного округа.

Н.И.Лобачевский так же как и многие его предшественники начинал с поиска доказательства пятого постулата Евклида. По-видимому, он начинал доказательство пятого постулата при помощи отрицания аксиомы параллельности Плейфера, предполагая, что через точку, не принадлежащую данной прямой, можно провести более одной прямой, не пересекающей данную. Поставив целью получить противоречие, Лобачевский, как и Саккери, стал получать из этой гипотезы многочисленные следствия, но в противоположность Саккери, он скоро пришел к твердому убеждению, что перед ним развертывается совершенно новая геометрическая система, лишенная противоречий.

В 1826 г., 11 февраля, Н.И.Лобачевский сделал доклад на заседании математического факультета об открытии неевклидовой ("воображаемой") геометрии. С этого момента началась упорная борьба Лобачевского за признание неевклидовой геометрии. Современники Лобачевского не были готовы воспринять геометрию, противоречащую установившимся веками взглядам на свойства пространства. Лобачевский разрабатывает неевклидову геометрию и доводит ее до уровня геометрии Евклида, создав неевклидовы планиметрию, тригонометрию, стереометрию и аналитическую геометрию, приводит приложения к вычислению определенных интегралов.

Н.И.Лобачевский намного опередил свое время. Потребовалось полвека, чтобы новые идеи получили всеобщее признание в науке и дальнейшее широкое развитие.

Геометрия Лобачевского выдвинула ряд важнейших проблем в области учения об аксиомах геометрии. Исследования Лобачевского явились первым доказательством независимости аксиомы параллельности от остальных аксиом и поставили вопросы независимости остальных аксиом геометрии, строения системы аксиом и требований, которые надо предъявлять к системам аксиом.

Работа по созданию прочного фундамента геометрии была завершена в 1899 г. в работе немецкого математика Д.Гильберта (1862-1943) "Основания геометрии".

18.4 Аксиомы Д.Гильберта евклидовой геометрии

Пусть даны три непустых множества X, Y, Z. Элементы множеств X назовем точками, элементы множества Y - прямыми, Z - плоскостями. Множества X, Y, Z назовем основными объектами.

Пусть на этих множествах определены три отношения "принадлежать", "между" и "конгруэнтность": точка принадлежит прямой (плоскости), точка B лежит между точками A и C, подмножество F множества точек X конгруэнтно (говорят еще -

"равно") подмножеству $E \subset X$.

Множество X называется евклидовым пространством, если данные отношения удовлетворяют следующим 5-ти группам свойств (аксиомам евклидова пространства).

I. **Аксиомы связи** описывают свойства отношения "принадлежать", при этом название данного отношения, как и других, меняется в зависимости от текста.

I_1. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки.

I_2. Через две различные точки проходит единственная прямая.

I_3. Существует по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

I_4. Через каждые три точки, не принадлежащих одной прямой, проходит единственная плоскость.

I_5. На каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.

I_6. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.

I_7. Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют и еще одну общую точку.

I_8. Существует по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

Для построения евклидовой планиметрии надо взять только первые три аксиомы.

Из этих аксиом вытекает ряд свойств. Например, из аксиом I_1 и I_5 вытекает, что прямая или плоскость - не пустые множества. Из аксиом связи вытекают следующие теоремы.

1). Через точку A и прямую a, не проходящую через эту точку, проходит единственная плоскость (I_2, I_4, I_6).

2). Если две различные прямые имеют единственную общую точку, то через них проходит единственная плоскость.

3). На каждой плоскости существует по крайней мере три точки.

4). Плоскость и прямая, не принадлежащая этой плоскости, имеют не более одной общей точки.

Из аксиом первой группы не вытекает, что на прямой существует более двух точек. Приведем пример.

Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, $Z = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$. Отношение "принадлежать" определяется по включению; так, точка 1 принадлежит прямой $\{1, 4\}$, а прямая $\{2, 3\}$ плоскости $\{1, 2, 3\}$. Аксиомы связи для таких основных множеств и так введенного отношения "принадлежать" выполняются, но каждая прямая содержит только две точки.

II. **Аксиомы порядка** описывают свойства отношения "между", то есть свойства расположения трех различных точек прямой.

II_1. Если точка B лежит между точками A и C (символически это отношение будем записывать так $A - B - C$), то A, B и C - попарно различные точки одной прямой и выполняется отношение $C - B - A$.

II_2. Каковы бы ни были точки A и C, существует точка B прямой AC такая, что $A - C - B$.

II_3. Среди трех точек прямой не более, чем одна лежит между двумя другими.

Определения. Пара точек A, B называется отрезком. Обозначение такого отрезка: AB. Точки, лежащие между точками A и B называются внутренними точками отрезка.

Множество трех точек, не принадлежащих одной прямой, называется треугольником. Отрезки AB, AC и BC называются сторонами треугольника, точки A, B, C называются вершинами треугольника.

II_4. (аксиома Паша). Если прямая a, лежащая в плоскости треугольника ABC, не проходит через его вершины и пересекает одну из его сторон, то прямая a пересекает одну из двух других сторон треугольника ABC.

Следствия.

1). На каждом отрезке есть по крайней мере одна внутренняя точка.

■ Отрезок AB произвольный. Существует точка, не принадлежащая прямой AB. Обозначим ее E. Существует точка F такая, что $A - E - F$. С Существует точка G такая, что $F - B - G$. Применим аксиому Паша к треугольнику AFB и прямой EG. Прямая EG пересекает только сторону AB во внутренней точке. ■

2). Среди трех точек прямой всегда одна из них лежит между двумя другими.

3). На каждом отрезке есть бесконечное множество точек.

Отношение "между" позволяет определить луч, полуплоскость. Пусть a - прямая, точка $O \in a$. По аксиоме I_1 на прямой a существует еще одна точка, обозначим ее A. Разобьем множество всех точек прямой a на два подмножества. К первому подмножеству отнесем все точки $M \in a$ такие, что либо $O - A - M$, либо $O - M - A$, либо $M = A$. Второе подмножество состоит из остальных точек прямой a. По аксиоме II_2 существует точка C такая, что $C - O - A$, следовательно второе подмножество не пусто. Каждое из этих подмножеств называется лучом с вершиной в точке O. Обозначение таких лучей: OA, OC.

Угол определяется как пара лучей с общей вершиной. Обозначение угла: $\angle(a, b)$. Угол между лучами AB и AC будем обозначать $\angle(BAC)$.

III. **Аксиомы конгруэнтности** (или равенства) описывают свойства отношения "конгруэнтность" для отрезков и углов. Отношение "конгруэнтность" будем обозначать символом $\equiv$.

III_1. Пусть a - произвольная прямая и A - точка этой прямой. Пусть CD - произвольный отрезок. Тогда на каждом из лучей с вершиной в точке A на прямой a существуют единственные точки B_1 и B_2 такие, что $AB_1 \equiv CD$, $AB_2 \equiv CD$.

III_2. Отношение $\equiv$ есть отношение эквивалентности на множестве всех отрезков:

a) $AB \equiv AB$, $AB \equiv BA$;

b) Если $AB \equiv CD$, то $CD \equiv AB$;

c) Если $AB \equiv CD$, $CD \equiv EF$, то $AB \equiv EF$.

III_3. Пусть отрезки AB и BC без общих внутренних точек принадлежат прямой a, отрезки $A'B'$ и $B'C'$ без общих внутренних точек принадлежат прямой a'. Если две пары соответствующих отрезков состоят из конгруэнтных отрезков, то конгруэнтны и отрезки третьей пары.

Следующие три аксиомы содержат свойства отношения "конгруэнтность" для углов.

III_4. Пусть дан угол $\angle(k, l)$ и луч a с вершиной в точке O. Тогда существуют единственные лучи b' и b'' с вершиной в точке O, расположенные по разные стороны от луча a и такие, что $\angle(a, b') \equiv \angle(k, l)$ и $\angle(a, b'') \equiv \angle(k, l)$.

III_5. Отношение конгруэнтности на множестве всех углов есть отношение эквивалентности.

III_6. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Пусть $BA \equiv B'A'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle(BAC) \equiv \angle(B'A'C')$. Тогда $\angle(ABC) \equiv \angle(A'B'C')$ и $\angle(ACB) \equiv \angle(A'C'B')$.

Опираясь на аксиомы всех трех групп, можно доказать, например, такие теоремы: в равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны; установить признаки конгруэнтности треугольников (по углу и двум прилежащим сторонам, по стороне и двум прилежащим углам, по трем сторонам).

Можно определить смежные углы, прямые углы (как конгруэнтные смежные), вертикальные углы. Можно доказать, что произвольный отрезок AB содержит точку O такую, что $AO \equiv OB$ (середина отрезка).

Вводится сравнение отрезков: считаем, что отрезок AB меньше отрезка CD (и пишем: $AB < CD$), если на отрезке CD существует точка E такая, что $AB \equiv CE$. Запись $AB \leqslant CD$, означает, что либо $AB < CD$, либо $AB \equiv CD$. Аналогично определяется сравнение углов и доказывается теорема о том, что внешний угол треугольника больше внутреннего с ним не смежного.

Определяется движение пространства: отображение $f : X \to X$ называется движением, если для любых точек A, B и их образов $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ выполняется отношение $AB \equiv A'B'$ (длины отрезков еще не определены!).

Введем **сложение отрезков**. Пусть a, b отрезки. На произвольной прямой d от точки $O \in d$ отложим в обе стороны отрезки, конгруэнтные отрезкам a и b. Если точки A и B прямой d такие, что $A - O - B$ и $AO \equiv a$, $BO \equiv b$ (аксиома III_1), то отрезок AB назовем суммой отрезков a и b. Обозначение суммы: $a+b$. По аксиоме III_2 можно записать $AB \equiv a + b$. Если построить сумму A_1B_1 отрезков a и b с помощью другой прямой, то из аксиомы III_3 следует соотношение $AB \equiv A_1B_1$.

Отметим некоторые свойства отрезков.

1). Сложение отрезков ассоциативно. Для натурального m обозначим через ma отрезок, конгруэнтный сумме m отрезков $a : a + a + ... + a$.

2). Пусть на лучах с вершинами в точках A и A' взяты точки B, C и B', C' соответственно такие, что $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$. Тогда, если $A-B-C$, то и $A'-B'-C'$ и $BC \equiv B'C'$.

■ По аксиоме III_1 существует точка C^* такая, что $BC \equiv B'C^*$ и $A' - B' - C^*$. По аксиоме III_3 : так как $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C^*$, то $AC \equiv A'C^*$. По аксиоме III_2 : так как $AC \equiv A'C'$, $AC \equiv A'C^*$, то $A'C' \equiv A'C^*$. По аксиоме III_1 : $C' = C^*$ и точка B' лежит между точками A' и C'. ■

3). Для произвольных отрезков AB и CD всегда выполняется одно из трех соотношений: $AB \equiv CD$, $AB > CD$, $AB < CD$.

■ На луче AB существует точка M такая, что $AM \equiv CD$. По определению луча и отношения "$<$", если $A - M - B$, то $AM < AB$. Если $M = B$, то $CD \equiv AB$, если если $A - B - M$, то $AM > AB$. ■

Обозначим через $\frac{1}{2}a$ отрезок, конгруэнтный половине отрезка a, через $\frac{1}{2^n}a$ - 2^n-ую часть отрезка a. Ясно, что $\frac{1}{2^n}a < \frac{1}{2^{n-1}}a$.

4). Для произвольных отрезков p и q существует натуральное число n такое, что $\frac{1}{2^n}p < q$ [5].

IV. **Аксиомы непрерывности** позволяют ввести длину отрезка.

IV_1 (аксиома Архимеда). Пусть AB и CD - произвольные отрезки. На прямой AB существует конечное множество точек A_1, $A_2, ...,$ A_n расположенных так, что $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3, ...,$ $A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$, $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv ... \equiv A_{n-2}A_{n-1} \equiv A_{n-1}A_n \equiv CD$ и выполняется отношение $A - B - A_n$.

Аксиома Архимеда позволяет каждому отрезку поставить в соответствии положительное число - длину отрезка. Для решения обратной задачи необходима следующая аксиома.

IV_2 (аксиома Кантора). Пусть на любой прямой a дана последовательность отрезков A_1B_1, $A_2B_2, ...$ такая, что каждый отрезок последовательности содержится в предыдущем. Пусть для произвольного отрезка CD найдется число n такое, что отрезок A_nB_n меньше CD. Тогда существует на прямой a единственная точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.

Геометрия, построенная на аксиомах групп I-IV называется **абсолютной геометрией**.

В абсолютной геометрии справедлива следующая

Теорема 18.4 *Через точку A, не принадлежащую прямой a, проходит по крайней мере одна прямая, не пересекающая прямую a.*

В рамках абсолютной геометрии нельзя доказать, что прямая, о которой говорится в теореме, единственна. Поэтому для построения евклидовой геометрии необходима следующая аксиома.

V (аксиома параллельности). Через точку A, не принадлежащую прямой a, в плоскости, определенной точкой A и прямой a, проходит не более одной прямой, не пересекающей прямую a.

Из предыдущей теоремы вытекает, что такая прямая единственна.

На аксиомах I - V строится геометрия на множестве X, названная евклидовой геометрией. В нее входят все утверждения из школьного курса геометрии.

Замечание 1. Можно доказать, что две аксиомы непрерывности можно заменить одной аксиомой Дедекинда [1]:

IV^*. Пусть все точки отрезка AB разделены на два непустых множества F_1 и F_2 так, что для любых точек $M \in F_1$ и $N \in F_2$ выполняется $A-M-N$. Тогда на отрезке AB существует точка C такая, что, если $M \in F_1$, то $A-M-C$, если $N \in F_2$, то $A-C-N$.

18.5 Измерение длины

Пусть $l(a)$ - положительная действительная функция на множестве всех отрезков такая, что

1) если $a \equiv b$, то $l(a) = l(b)$;

2) если $a \equiv b + c$, то $l(a) = l(b) + l(c)$;

3) существует отрезок e такой, что $l(e) = 1$.

Число $l(a)$ называется **длиной отрезка** a в масштабе e. Условия 1-3 называются аксиомами длины отрезка.

Докажем существование и единственность длины отрезка в абсолютной геометрии.

Теорема 18.5 *Для данного отрезка e каждому отрезку a можно сопоставить положительное число $l(a)$ так, что будут выполняться условия 1-3 определения длины отрезка.*

■ Возьмем отрезок e и обозначим через e_n отрезок, конгруэнтный 2^n части отрезка e: $e_n \equiv 1/2^n e$. Определим вспомогательную функцию l_0 следующими равенствами:

$l_0(e) = 1$, $l_0(\frac{m}{2^n}e) = \frac{m}{2^n}$, то есть $l_0(me_n) = \frac{m}{2^n}$. Эта функция определена на отрезках e_n. Ясно, что $l_0(me_n + pe_n) = \frac{(m+p)}{2^n}$.

Пусть a - произвольный отрезок. По свойству отрезков найдется целое n_0 такое, что для всех $n > n_0$: $e_n < a$. По аксиоме Архимеда для данного отрезка e_n найдется натуральное m_n, зависящее от n, такое, что

$$m_n e_n \leqslant a < (m_n + 1)e_n.$$

Отрезок, конгруэнтный левой части этих неравенств, для каждого n обозначим через

$$a_n \equiv m_n e_n \tag{1}$$

Рассмотрим переход от n к $n+1$. Запишем: $e_{n+1} \equiv \frac{1}{2^{n+1}}e \equiv \frac{1}{2}(\frac{1}{2^n}e) \equiv \frac{1}{2}e_n$. Поэтому отрезок a_{n+1} получается из сложения отрезка a_n с, возможно, одним отрезком e_{n+1}. Следовательно $l_0(a_{n+1}) = \frac{2m_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{m_n}{2^n} = l_0(a_n)$ (слагаемого $\frac{1}{2^{n+1}}$ может и не быть). Поэтому последовательность $\{l_0(a_n)\}$, $n = n_0, n_0+1, \ldots$ неубывающая и ограничена сверху, например, числом $\frac{m_{n_0}+1}{2^{n_0}}$. Такая последовательность имеет предел $l(a) = \lim_{n\to\infty} l_0(a_n)$. Покажем, что это и есть длина отрезка a.

Так как отрезок a_n больше отрезка $\frac{1}{2^{n_0}}e$ при некотором n_0, то $l(a) = \lim_{n\to\infty} l_0(a_n) > \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n_0}}e = \frac{1}{2^{n_0}}e > 0$.

Поэтому функция $l(a)$ положительная. Проверим аксиомы длины.

1). Пусть отрезок a есть сумма отрезков b и $c : a \equiv b + c$. Пусть $b \equiv b_n + \beta_n$, $c \equiv c_n + \gamma_n$, где отрезки b_n, c_n имеют вид (1), отрезки $\beta_n < e_n$, $\gamma_n < e_n$. Отсюда получим, что

$$b + c \equiv b_n + c_n + \beta_n + \gamma_n,$$

при этом сумма $\beta_n + \gamma_n < 2e_n$.

Откладывая отрезок e_n на сумме a, получим, что на отрезке a поместится столько же отрезков, сколько разместилось на b и c и, возможно, еще один. Поэтому справедливы неравенства:

$$b_n + c_n \leqslant a_n \leqslant b_n + c_n + e_n$$

Функция l_0 - монотонно возрастающая, поэтому

$$l_0(b_n + c_n) \leqslant l_0(a_n) \leqslant l_0(b_n + c_n + e_n)$$

или

$$l_0(b_n) + l_0(c_n) \leqslant l_0(a_n) \leqslant l_0(b_n) + l_0(c_n) + \frac{1}{2^n}.$$

Перейдем здесь к пределу при $n \to \infty$, получим, что

$$l(b) + l(c) = \lim_{n\to\infty}(l_0(b_n) + l_0(c_n)) \leqslant l(a) \leqslant l(b) + l(c) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}$$

или $l(a) = l(b) + l(c)$. ■

2). Пусть отрезки a и a' конгруэнтны. Из аксиом конгруэнтности вытекает, что на этих отрезках укладывается равное количество отрезков e_n, поэтому $a_n \equiv a'_n$ и

$$l(a) = \lim_{n\to\infty} l_0(a_n) = \lim_{n\to\infty} l_0(a'_n) = l(a').$$

3). Для отрезка $a \equiv e$: $a_n \equiv m_n e_n \equiv e$ для всех $n > 1$. Поэтому

$$l(e) = \lim_{n\to\infty} l_0(a_n) > \lim_{n\to\infty} l(e) = 1.$$

Следствие. Если отрезок a больше отрезка $b : a > b$, то $l(a) > l(b)$.

Лемма 18.1 *Пусть l_1, l_2 - две положительные функции, удовлетворяющие аксиомам 1) и 2) длины отрезка. Тогда существует число k такое, что $l_1(a) = k\, l_2(a)$ для всех отрезков a.*

■ Возьмем отрезок e, пусть $e_n \equiv \frac{1}{2^n}e$. По аксиоме 2 длины отрезка можно записать, что

$$2^n l_1(e_n) = \underbrace{l_1(e_n) + ... + l_1(e_n)}_{2^n} = l_1(2^n e_n) = l_1(e) \tag{2}$$

Аналогично: $2^n l_2(e_n) = l_2(e)$.

Возьмем произвольный отрезок a. По аксиоме Архимеда при больших значениях n:

$$m_n e_n \leqslant a < (m_n + 1)e_n.$$

Отсюда, из следствия теоремы и аксиомы 2

$$m_n l_1(e_n) \leqslant l_1(a) < (m_n + 1) l_1(e_n).$$

Делим части этих неравенств на $2^n l_1(e_n)$ и, учитывая (2), получим

$$\frac{m_n}{2^n} \leqslant \frac{l_1(a)}{l_1(e)} < \frac{m_n + 1}{2^n} \tag{3}$$

Аналогично:

$$\frac{m_n}{2^n} \leqslant \frac{l_2(a)}{l_2(e)} < \frac{m_n + 1}{2^n} \tag{4}$$

Так как

$$\left| \frac{m_n}{2^n} - \frac{m_n + 1}{2^n} \right| \to 0$$

при $n \to \infty$, то переходя к пределу в 3) и 4) при $n \to \infty$, получим, что

$$\frac{l_1(a)}{l_1(e)} = \frac{l_2(a)}{l_2(e)}.$$

или

$$l_1(a) = \frac{l_1(e)}{l_2(e)} l_2(a). \quad ■$$

Их этой леммы вытекает следующая

Теорема 18.6 *При данном масштабе e существует только одна функция, определенная на множестве всех отрезков, удовлетворяющая аксиомам длины отрезка 1-3.*

■ Предположим, что существует две длины l_1, l_2 при данном масштабе e. Тогда $l_1(e) = l_2(e) = 1$, а из леммы: $l_1(a) = l_2(a)$ для любого отрезка a. ■

Следствие. Пусть l_1, l_2 - две длины с масштабами e_1, e_2. Из леммы следует формула перечисления длин:

$$l_1(a) = l_1(e_2) l_2(a) = l_2(a) \frac{1}{l_2(e_1)}.$$

Теперь решим обратную задачу.

Теорема 18.7 *Пусть l - длина в масштабе e. Для любого положительного числа x существует отрезок a такой, что $l(a) = x$.*

■ Пусть x - положительное число. Для любого натурального n обозначим через m_n наибольшее натуральное число, не большее $2^n x$. Тогда

$$m_n \leqslant 2^n x < m_n + 1 \tag{5}$$

или

$$\frac{m_n}{2^n} \leqslant x < \frac{m_n + 1}{2^n}$$

При этом последовательность $\{\frac{m_n}{2^n}\}$ не убывает, $\{\frac{m_n+1}{2^n}\}$ - не возрастает. Действительно, домножим на 2 части неравенств (5), получим $2m_n \leqslant 2^{n+1}x < 2(m_n + 1)$. Следовательно, $m_{n+1} \geqslant 2m_n$ или $\frac{m_{n+1}}{2^{n+1}} \geqslant \frac{m_n}{2^n}$. Аналогично показывается, что последовательность $\{\frac{m_n+1}{2^n}\}$ не возрастает. Так как эти последовательности ограничены, то они имеют предел при $n \to \infty$, который конечно равен x.

Отложим на луче с началом в точке 0 отрезки $OA_n \equiv \frac{m_n}{2^n}e$ и $OB_n \equiv \frac{m_n+1}{2^n}e$. Тогда каждый из отрезков A_nB_n содержится в предыдущем. Так как $A_nB_n \equiv \frac{1}{2^n}e$, то для любого отрезка CD найдется натуральное n такое, что $A_nB_n < CD$. По аксиоме Кантора существует точка X, принадлежащая всем отрезкам A_nB_n. Тогда $OX \equiv OA_n + A_nX$. Отсюда

$$l(OX) = l(OA_n) + l(A_nX) = \frac{m_n}{2^n} + l(A_nX) \tag{6}$$

Так как $A_nX \leqslant A_nB_n \equiv \frac{1}{2^n}e$ и, следовательно, $l(A_nX) \to 0$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу в (6) при $n \to \infty$, получим, что $l(OX) = x$. ■

18.6 Измерение площадей

Определим площадь многоугольника в евклидовой геометрии. Площадь многоугольника, как и длина отрезка, определяется аксиоматически.

Для доказательства существования площади многоугольника надо построить некоторую положительную функцию на множестве всех многоугольников, удовлетворяющую аксиомам площади. Площадь многоугольника - это результат её измерения с помощью квадратов со сторонами равными $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$ В учебниках по геометрии авторов Александрова А.Д. и др. площадь многоугольника так и введена. Есть другие, менее наглядные, но достаточно короткие способы построения площади многоугольника [4], [8]. Один из таких способов мы здесь и рассмотрим.

Определение площади

Ломаной линией (ломаной) называется конечное множество точек A_1, $A_2, ...,$ A_n. Отрезки A_iA_{i+1}, $i = 1, 2, ..., n-1$ называются звеньями ломаной, концы звеньев - вершинами ломаной. Ломаная называется замкнутой, если последняя вершина совпадает с первой. Звенья вида $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} называются смежными звеньями ломаной, у замкнутой ломаной первое и последнее звенья считаются смежными. Ломаная называется простой, если только ее смежные звенья имеют одну общую точку.

Теорема 18.8 (К.Жордан) *Простая замкнутая ломаная разделяет множество всех точек плоскости на два непересекающихся подмножества. Одно из таких подмножеств не содержит прямых и называется внутренней областью плоскости относительно данной ломаной.*

Объединение простой замкнутой ломаной и внутренней области плоскости относительно этой ломаной называется простым многоугольником (многоугольником), при этом ломаную называют границей многоугольника.

Так, под треугольником будем понимать простую трехзвенную ломаную, объединенную с внутренней треугольной областью.

Два многоугольника (или просто множества) F и G называются конгруэнтными (равными), если существует движение f такое, что $f(F) = G$. Обозначение для конгруэнтных многоугольников: $F \equiv G$.

Многоугольник F называют суммой многоугольников F_1 и F_2, (пишут $F = F_1 + F_2$), если $F = F_1 \cup F_2$, а пересечение $F_1 \cap F_2$ есть простая ломаная.

Определение площади многоугольника. Пусть S есть положительная действительная функция, определенная на множестве всех простых многоугольников, такая, что

1). Из отношения $F \equiv G$ следует равенство $S(F) = S(G)$.

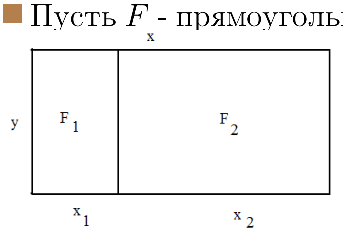
2). Если простой многоугольник F есть сумма многоугольников F_1 и F_2, то $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$.

3). Если P есть квадрат со стороной, равной 1, то $S(P) = 1$.

При выполнении этих условий значение функции S называется площадью многоугольника F.

Теорема 18.9 *Допустим, что площадь S существует. Тогда для прямоугольника F с длинами сторон, равными x и y, его площадь $S(F) = xy$.*

■ Пусть F - прямоугольник с длинами сторон x и y. Предположим, что площадь $S(F)$



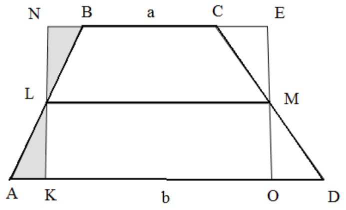
зависит от длин его сторон, то есть считаем, что $S(F)$ есть функция x и y : $S(F) = f(x, y)$. Отметим свойства функции $f(x, y)$. Из свойства 3) площади следует, что $f(1, 1) = 1$. Пусть прямоугольник F составлен из прямоугольников F_1 и F_2, как на рисунке. Тогда $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$ или $f(x, y) = f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$. Аналогичным свойством обладает функция f относительно второй переменной: $f(x, y) = f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$. Известно, что положительная функция $g(x)$, определенная при всех $x > 0$ и удовлетворяющая свойству аддитивности $g(x_1+x_2) = g(x_1)+g(x_2)$, имеет вид $g(x) = xg(1)$[1].

Поэтому можно записать, что $f(x, y) = xf(1, y) = xyf(1, 1) = xy$.■

---

[1] Если m -натуральное число, то из аддитивности получим $g(m) = mg(1)$. Если m, n - натуральные числа, то $g(\frac{m}{n}) = mg(\frac{1}{n})$. Положим здесь $m = n$, тогда $g(1) = ng(\frac{1}{n})$. Следовательно $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}g(1)$. Отсюда получаем, что свойство функции доказано для рациональных чисел $\frac{m}{n}$: $g(\frac{m}{n}) = mg(\frac{1}{n}) = \frac{m}{n}g(1)$. Пусть x - произвольное положительное число. Для любого натурального числа n найдется натуральное число m_n такое, что $\frac{m_n}{2^n} \leqslant x < \frac{m_n+1}{2^n}$. Как уже отмечалось, последовательности $\frac{m_n}{2^n}$ и $\frac{m_n+1}{2^n}$ сходятся к x при $n \to \infty$. Докажем, что $g(x)$ - возрастающая функция. Действительно, если $x > y$, то $g(x) = g(y + (x - y)) = g(y) + g(x - y) > g(y)$. Поэтому $g(\frac{m_n}{2^n}) \leqslant g(x) < g(\frac{m_n+1}{2^n})$. Отсюда $\frac{m_n}{2^n}g(1) \leqslant g(x) < \frac{m_n+1}{2^n}g(1)$. Переходим к пределу при $n \to \infty$, получим $xg(1) \leqslant g(x) < xg(1)$ то есть $g(x) = xg(1)$.

Следствие. Пусть F - трапеция с основаниями a, b и высотой h. Тогда площадь $S(F)=\frac{a+b}{2}h$. В частности, если F - треугольник, то $S(F)=\frac{1}{2}ah$.



■ Пусть $ABCD$ - трапеция, LM - ее средняя линия. Построим прямоугольник $NEOK$ как на рисунке. Центральная симметрия с центром в точке L преобразует треугольник NBL в треугольник KAL. Так как симметрия есть движение, то $\triangle NBL \equiv \triangle KAL$. По аксиоме 1 площади $S(\triangle NBL)=S(\triangle KAL)$. Аналогично получаем равенство $S(\triangle MCE)=S(\triangle MDO)$. По аксиоме 2 площади можно записать:

$S(ABCD)=S(\triangle KAL+KLBCMO+\triangle MDO)=S(\triangle KAL)+S(KLBCMO)+$
$S(\triangle MDO)=S(\triangle LNB)+S(KLBCMO)+S(\triangle CEM)=S(KNEO)=KO\cdot KH$.

Средняя линия трапеции $KO=\frac{1}{2}(a+b)$, поэтому $S(ABCD)=\frac{1}{2}(a+b)h$.

Аналогично выводится формула площади треугольника. ■

Единственность площади

Допустим, что существуют две площади многоугольника - S и H. Покажем, что $S=H$.

■ Пусть F - произвольный многоугольник. Представим его каким-нибудь образом как сумму треугольников: $F=\triangle_1+\triangle_2+...+\triangle_k$. Тогда из теоремы 19.10 и аксиомы 2) следует, что

$$S(F)=\sum_{i=1}^{k}S(\triangle_i)=\sum_{i=1}^{k}H(\triangle_i)=H(F). \quad ■$$

Существование площади

Считаем, что евклидова геометрия развита настолько, что введены векторы и скалярное произведение. Известно, что скалярное произведение сохраняется при движении в следующем смысле: если A', B', C', - образы точек A, B, C, то $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{A'B'}\cdot\overline{A'C'}$.

Введем одно понятие. Пусть AB - сторона многоугольника F, точка $M\in AB$. Единичный вектор $\overline{MN}$, перпендикулярный стороне AB назовем ортом внешней нормали к стороне AB многоугольника F, если некоторая окрестность вершины луча $[MN)$ не содержит внутренних точек многоугольника F. Другими словами, вектор $\overline{MN}$ направлен во внешнюю сторону относительно многоугольника.

Теорема 18.10 *Функция*

$$S(F)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}l_i(\overline{OM}_i\cdot\overline{n}_i), \tag{1}$$

определенная на множестве всех многоугольников, положительна и удовлетворяет всем аксиомам площади. Здесь, F - многоугольник, k - число его сторон, l_i - длина i-ой стороны, M_i - внутренняя (не вершина) точка i-ой стороны, $\overline{n}_i$ - орт внешней нормали i-ой стороны многоугольника F, O - произвольная точка плоскости.

■ Функция (1) не зависит от выбора точки O и точки M_i на i-ой стороне многоугольника[1].

Проверим для функции (1) выполнение аксиом площади.

1). Пусть F, F' - два конгруэнтных многоугольника. Существует движение f такое, что $f(F) = F'$. Пусть i-ые стороны многоугольников F и F' будут соответствующими в отображении f. Пусть O - произвольная точка плоскости, $O' = f(O)$, точки $M_i' = f(M_i)$ и M_i принадлежат i-ым сторонам многоугольников. Если орт внешней нормали к i-ой стороне многоугольника F обозначить через $\overline{n_i} = \overline{M_iK_i}$, а $K_i' = f(K_i)$, то вектор $\overline{n_i}' = \overline{M_i'K_i'}$ будет ортом внешней нормали к i-ой стороне многоугольника F', так как f - движение и, следовательно, сохраняет скалярное произведение векторов (и угол). Кроме того, длины соответствующих сторон равны: $l_i = l_i'$. Отсюда получаем

$$S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} l_i(\overline{OM}_i \cdot \overline{n}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} l_i'(\overline{O'M'}_i \cdot \overline{n}_i') = S(F').$$

2). Пусть многоугольник F есть сумма многоугольников $F_1 + F_2$, сторона AB - общая для многоугольников F_1 и F_2. Пусть $\overline{n}, \overline{n}'$ - орты внешних нормалей к стороне AB для F_1 и F_2. Тогда $\overline{n} = -\overline{n}'$, поэтому $l(\overline{OM} \cdot \overline{n}) + l(\overline{OM} \cdot \overline{n}') = 0$. Отсюда получаем

$$S(F_1) + S(F_2) = \frac{1}{2}\sum_{F_1} l_i(\overline{OM}_i \cdot \overline{n}_i) + \frac{1}{2}\sum_{F_2} l_i'(\overline{OM'}_i \cdot \overline{n'}_i).$$

В этих суммах слагаемые, соответствующие общим сторонам многоугольников, взаимно уничтожатся, оставшееся члены будут соответствовать сторонам многоугольника F.

3). Пусть $P = ABCD$ - квадрат со стороной, равной 1. Вычислим $S(P)$. Пусть точка O - центр квадрата, M_i - середины сторон, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда $\overline{OM}_i \cdot \overline{n}_i = |\overline{OM}_i||\overline{n}_i| \cos 0^\circ = |\overline{OM}_i| = \frac{1}{2}$, следовательно $S(P) = \frac{1}{2}(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) = 1$.

4). Покажем, что $S(F) > 0$ для любого многоугольника F. Любой многоугольник можно представить как сумму треугольников. В силу свойства 2) $S(F)$ будет равно сумме значений функции S на треугольниках. Пусть ABC треугольник с основанием BC и высотой h, точка M - основание высоты, опущенной из A, $\overline{n}$ - орт внешней нормали к стороне BC. По формуле (1), предполагая, что точка O совпадает с вершиной A, получим, что $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}BC(\overline{OM} \cdot \overline{n}) = \frac{1}{2}BC \cdot h > 0$. Следовательно, $S(F) > 0$.
■

Замечания. 1). После введения площади простого многоугольника можно ввести площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, так, как это делается в математическом анализе.

---

[1] Докажем, что сумма $\sum_{i=1}^{k} l_i(\overline{OM}_i \cdot \overline{n}_i)$ не зависит от выбора точки M_i на i-ой стороне многоугольника. Пусть M_i' еще одна точка на i-ой стороне многоугольника. Тогда $\overline{OM}_i' = \overline{OM}_i + \overline{M_iM_i'}$. Отсюда $\overline{OM}_i' \cdot \overline{n_i} = \overline{OM}_i \cdot \overline{n_i} + \overline{M_iM_i}' \cdot \overline{n_i} = \overline{OM}_i \cdot \overline{n_i}$.

Докажем, что сумма (1) не зависит от выбора точки O. Возьмем еще одну точку O'. Тогда $\overline{O'M}_i' = \overline{O'O} + \overline{OM_i}$. Отсюда $\sum_{i=1}^{k} l_i(\overline{O'M}_i \cdot \overline{n}_i) + \sum_{i=1}^{k} l_i(\overline{OO'} \cdot \overline{n}_i) + \sum_{i=1}^{k} l_i(\overline{OM}_i \cdot \overline{n}_i)$ Покажем, что сумма $\sum_{i=1}^{k} l_i(\overline{OO'} \cdot \overline{n}_i)$ равна нулю, то есть $\overline{OO'} \cdot (\sum_{i=1}^{k} l_i\overline{n}_i) = 0$. Покажем, что $\sum_{i=1}^{k} l_i\overline{n}_i) = 0$. Пусть $\overline{n_i} = (a_i, b_i)$. Повернем вектор $\overline{n_i}$ на 90° в одну сторону (например, по часовой стрелке), получим вектор $\overline{m}_i = (-b_i, a_i)$. При этом вектор $\overline{m}_i$ параллелен i-ой стороне и его длина $|\overline{m}_i| = 1$ для всех $i = 1, 2, ..., k$. Поэтому $l_i\overline{m}_i = \overline{A_iA_{i+1}}$, для всех $i = 1, 2, ..., k$; здесь считаем, что A_i - i-ая вершина многоугольника и $A_1 = A_{k+1}$. Так как граница многоугольника есть замкнутая ломаная, то сумма векторов $\sum_{i=1}^{k-1} \overline{A_iA_{i+1}}$ равна нулю. Отсюда $\sum_{i=1}^{k-1} l_i\overline{m}_i = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{A_iA_{i+1}} = 0$.

2). По аналогии с площадью многоугольника можно ввести объем простого многогранника.

19 Исследование системы аксиом

19.1 Непротиворечивость, полнота, независимость

При аксиоматическом построении математической теории, в частности геометрии, естественным образом возникают следующие вопросы.

1). Не **противоречива** ли принятая нами система аксиом, то есть не могут ли из нее быть выведены путем логических рассуждений два взаимно исключающих друг друга следствия?

2). **Полна** ли система аксиом, то есть нельзя ли ее пополнить новыми аксиомами, которые не противоречили бы уже принятым и не вытекали бы из них?

3). **Независима** ли принятая непротиворечивая система аксиом, то есть не следует ли одна из них из остальных?

Решение этих вопросов связано с реализацией системы аксиом. При построении аксиоматической теории в качестве основных объектов берутся абстрактные множества. Так, при построении евклидовой геометрии по Гильберту взяты три множества, о природе элементов которых ничего не говориться. В проективной геометрии - три множества, одно из которых названо проективным пространством, второе - векторным пространством и третье - множеством действительных чисел. **Реализация** (или **итнерпретация**) системы аксиом состоит в придании конкретного смысла элементам основных объектов. При этом конкретные множества, выполняющие роль основных объектов, называются **моделью** данной системы аксиом. Если реализация системы аксиом построена, то все теоремы будут высказываниями об элементах конкретных множеств. В параграфе 19.4 (группа аксиом I) дана реализация I группы аксиом. При построении основных объектов X, Y и Z использовались действительные числа. В этом и заключается конкретность основных объектов в такой реализации.

Доказательство непротиворечивости системы аксиом сводится к построению некоторой ее реализации. Если бы из данной системы аксиом логически вытекали бы два взаимно исключающих друг друга утверждения, то такое же противоречие возникло бы и в реализации, а это противоречило бы природе вещей, отраженной в реализации. Часто строится реализация системы аксиом с использованием теории действительных чисел (арифметики). Опыт показывает, что противоречия в арифметике маловероятны, хотя доказательство того, что арифметика свободна от противоречий, не существует. Поэтому в случае построения арифметической реализации говорят, что данная система аксиом непротиворечива, если непротиворечива арифметика. Можно осуществить реализацию данной системы аксиом и в другой аксиоматической теории, система аксиом которой непротиворечива. Требование непротиворечивости данной системы аксиом является наиболее важным, так как наличие противоречия в системе аксиом означает ее полную математическую непригодность.

Доказательство независимости аксиомы a от остальных в системе аксиом T сводится к установлению непротиворечивости системы аксиом $T' = (T\setminus\{a\})\cup\{\overline{a}\}$, где $\overline{a}$ означает утверждение, противоположное утверждению a. Если найдена реализация R системы аксиом T', то аксиома a не зависит от оставшихся аксиом $T\setminus\{a\}$. Действительно, если бы a зависела от аксиом $T\setminus\{a\}$, то есть аксиома a как теорема логически вытекала бы из аксиом $T \setminus \{a\}$, то в реализации R было бы два утверждения a и $\overline{a}$, что невозможно.

Доказательство полноты данной системы аксиом связано с понятием изоморфизма двух реализаций данной системы аксиом. Говорят, что две реализации R_1 и R_2 данной системы аксиом T изоморфны, если они отличаются только сутью своих элементов. Можно сказать по-другому: реализации R_1 R_2 изоморфны, если существует биекция моделей, соответствующих этим реализациям, которая сохраняет основные отношения. Например, если у нас есть две изоморфные реализации системы аксиом Гильберта, то это означает следующее. Пусть точке A и прямой a в одной реализации поставлены в соответствие точка A' и прямая a' в другой реализации. Если при этом точка A принадлежит прямой a, то и точка A' принадлежит прямой a' и так далее.

Понятие изоморфизма очевидно транзитивно, то есть если две реализации изоморфны третьей, то они изоморфны между собой. Вопрос о полноте системы аксиом сводится к вопросу о изоморфизме всех ее реализаций, точнее - система аксиом T полна, если любые две ее реализации изоморфны. ■ Допустим, что T - неполная система аксиом. Покажем, что найдутся две ее неизоморфные реализации. Пусть существует утверждение a, не вытекающее из аксиом T и такое, что система аксиом $T \cup \{a\}$ непротиворечива. Так как аксиома a не зависит от системы аксиом T, то непротиворечива и система аксиом $T \cup \{\overline{a}\}$. Пусть R_1 и R_2 реализации систем аксиом $T \cup \{a\}$ и $T \cup \{\overline{a}\}$. Тогда R_1 и R_2 будут реализациями и системы аксиом T и они не изоморфны, так как в R_1 выполняется утверждение a, а в R_2 - $\overline{a}$. ■

Примеры. Система аксиом абсолютной геометрии не полна. Аксиому параллельности V (или аксиому Лобачевского $V_л$, параграф 20.5), рассмотренную как теорему, нельзя ни доказать, ни опровергнуть в абсолютной геометрии. Неполнота аксиом абсолютной геометрии следует из существования реализации аксиом Гильберта и аксиом Лобачевского. В одной реализации выполняется аксиома V, в другой $V_л$, что означает неизоморфность реализации. Система аксиом Евклида не полна. Она впоследствии были дополнена аксиомами Архимеда, Паша, Кантора.

19.2 Многообразие систем аксиом евклидовой геометрии. Непротиворечивость и полнота системы аксиом Вейля евклидовой геометрии

Многообразие систем аксиом евклидовой геометрии. Кроме систем аксиом Евклида (III в. до н. э.) и Гильберта (1899) существует множество других систем аксиом евклидовой геометрии. Одновременно с появлением системы аксиом Гильберта была опубликована система аксиом итальянского математика М.Пиери. Основными понятиями в системе аксиом Пиери были "точка" и "движение". Прямая определялась через движение. Система аксиом Пиере оказалась очень сложной и не получила дальнейшего распространения. С движением связана и система аксиом Ф.Шура. Его система аксиом похожа на систему аксиом Гильберта и отличается от нее понятием конгруэнтности. Конгруэнтность фигур понималась как соответствие фигур при движении. В 1904 году профессором МГУ В.Ф.Каганом была предложена система аксиом, в которой длина отрезка определялась как вещественное число (не было связи с какими-либо измерениями). Подобная система аксиом была принята в школьных учебниках [10], [11]. Такая система аксиом неоднократно подвергалась критике. Отрезок имеет определенную длину не сам по себе, а в результате его измерения другим отрезком, его сравнение с другим отрезком, что соответствует и практике, и геометрии.

В 1918 г. немецкий математик Г.Вейль предложил систему аксиом, основанную на теории векторных пространств.

Подробное исследование этих систем аксиом можно найти в [13].

Две системы аксиом евклидовой геометрии называются эквивалентными, если геометрии, построенные на эти системах аксиом, совпадают.

Для доказательства эквивалентности двух систем аксиом достаточно доказать все аксиомы одной системы аксиом, как теоремы, в геометрии, построенной на другой системе аксиом. Понятно, что если одна из двух эквивалентных систем аксиом непротиворечива, то непротиворечива и другая система аксиом.

Надо думать, что все предложенные системы аксиом евклидовой геометрии эквивалентны. Выбор той или иной системы аксиом, например в школьном учебнике, определяется, в основном, простотой, возможно в ущерб другим требованиям.

Рассмотрим одну из систем аксиом евклидовой геометрии и докажем ее непротиворечивость и полноту.

Система аксиом Г.Вейля евклидовой геометрии. Во втором семестре мы рассматривали следующее определение евклидова пространства.

Пусть V - векторное пространство. Множество $E \neq \emptyset$ называется евклидовым пространством, если любым двум точкам $A, B \in E$ поставлен в соответствие вектор из V (который будем обозначать $\overline{AB}$) так, что выполняются свойства:

1). $\forall A \in E$, $\forall \overline{a} \in V$, $\exists! B \in E : \overline{AB} = \overline{a}$.

2). $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ для любых точек $A, B, C \in E$.

3). Векторное пространство V - евклидово.

Векторное пространство V называется пространством переносов пространства E. Размерностью евклидова пространства E называют размерность его пространства переносов V. Если $\dim V = 2$, то E называется евклидовой плоскостью, если $\dim V = 3$, то E -евклидово пространство.

Отметим некоторые следствия определения (см. II семестр): 1). $\overline{AA} = \overline{0}$. 2). Если $\overline{AB} = \overline{0}$, то $A = B$. 3). Если $\overline{AB} = \overline{DC}$, то $\overline{BC} = \overline{AD}$. 4). $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Основными объектами в системе аксиом Вейля являются три абстрактных множества - множество действительных чисел, множество векторов и множество E. Отношения на этих множествах сформулированы в определениях действительных чисел, векторного пространства и определении евклидова пространства. Свойства этих отношений описываются в аксиомах действительных чисел, векторных пространств и 1-3 аксиомах евклидова пространства. Так что система аксиом Вейля более громоздка по сравнению с системой аксиом Гильберта. Но, так как системы аксиом действительных чисел и векторных пространств построены и изучены ранее, то они не приводятся в определении евклидова пространства по Вейлю.

Непротиворечивость системы аксиом Вейля. Построим арифметическую реализацию системы аксиом Вейля евклидова пространства. Сначала построим арифметическую реализацию системы аксиом трехмерного векторного пространства.

Обозначим через V декартово произведение $R \times R \times R$, R - множество действительных чисел. Элементы V назовем векторами. Определим сложение векторов. Пусть

$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ два вектора. Суммой векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ назовем вектор $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_2, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, произведением вектора $\overline{x}$ на число λ назовем вектор $\lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$. Нетрудно проверить, что V - векторное пространство. Векторы $\overline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\overline{e}_3 = (0, 0, 1)$ линейно независимы и для любого вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ можно написать, что $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$. Следовательно, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ - базис V. Векторное пространство V - трехмерно. Таким образом построена реализация системы аксиом векторного пространства в теории действительных чисел (в арифметике). Так что система аксиом векторного пространства непротиворечива, если непротиворечива арифметика.

Теперь построим реализацию системы аксиом Вейля евклидова пространства. Рассмотрим множество

$$E = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad x_1, x_2, x_3 \in R\}.$$ [1]

Двум точкм

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

из E поставим в соответствие вектор $\overline{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_2 - x_2) \in V$.

Проверим выполнимость аксиом Вейля. 1). Точка $A \in E$ и вектор $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ определяют единственную точку

$$B = \begin{pmatrix} a_1 + x_1 \\ a_2 + x_2 \\ a_3 + x_3 \end{pmatrix}$$

такую, что $\overline{AB} = \overline{a}$. 2). Пусть

$$C = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Так как $\overline{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$, $\overline{BC} = (z_1 - y_1, z_2 - y_2, z_3 - y_3)$, то $\overline{AB} + \overline{BC} = (z_1 - x_1, z_2 - x_2, z_3 - x_3) = \overline{AC}$.

Таким образом доказана

Теорема 19.1 *Система аксиом Вейля евклидова пространства непротиворечива, если непротиворечива арифметика.*

Теорема 19.2 *Система аксиом Вейля евклидова пространства полна.*

■ Пусть R_0 реализация, построенная выше, R - произвольная реализация системы аксиом Вейля евклидова пространства. В реализации R можно ввести систему координат и каждой точке поставить в соответствие три числа - ее координаты. Отображение моделей реализаций R_0 и R, ставящее в соответствие точки с одинаковыми

[1]Координаты точек можно писать и горизонтально.

координатами, будет изоморфизмом этих реализаций. Действительно, уравнения соответствующих плоскостей, прямых будут одни и те же. Если точка принадлежит прямой в одной реализации, то ей соответствующая точка принадлежит соответствующей прямой в другой реализации. Транзитивность изоморфизма показывает, что любые две реализации системы аксиом Вейля изоморфны. Следовательно, система аксиом Вейля полна. ■

19.3 Равносильность систем аксиом Вейля и Погорелова

Покажем, что система аксиом евклидовой геометрии Вейля и система аксиом евклидовой геометрии Погорелова, приведенная в школьном учебнике геометрии [15], равносильны. Отсюда будет следовать непротиворечивость системы аксиом евклидовой геометрии Погорелова.

Ограничимся рассмотрением систем аксиом планиметрии.

1). В геометрии G_n, построенной на системе аксиом Погорелова, на некотором этапе вводятся векторы, которые образуют двумерное векторное пространство относительно операций сложения и умножения на действительное число. При этом аксиома 1 Вейля следует из единственности откладывания вектора от данной точки, а аксиома 2 есть определение сложения векторов. Скалярное произведение также имеет место. Это значит, что геометрия, построенная на системе аксиом Вейля $G_в$, содержится в геометрии, построенной на системе аксиом Погорелова.

2). Покажем обратное включение: $G_n \subset G_в$. Для этого достаточно доказать все аксиомы Погорелова как теоремы в геометрии $G_в$.

Пусть E - евклидово пространство в определении Вейля, V - его пространство переносов. Начнем с определения прямой. Прямой l, проходящей через точку $M_0 \in E$ параллельно вектору $\overline{p} \in V$ называется множество $\{M \in E | \overline{M_0M} = \lambda\overline{p}, \lambda \in R.\}$. Если обозначим через V^1 или $\{\overline{p}\}$ одномерное векторное подпространство $\{\lambda\overline{p}, \lambda \in R\} \subset V$, то по определению прямой можно записать, что: $l = \{M \in E | \overline{M_0M} \in V^1\}$. Такую прямую будем обозначать так $l = (M_0, V^1)$. В семестре II было доказано, что в качестве начальной точки M_0 можно взять любую точку прямой.

Совокупность точки и базиса $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ называется аффинной системой координат. Три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, порождают систему координат, в которой A - начало координат, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ образуют базис V. Обозначение: $R = (A, B, C)$. Координатами точки M в системе координат $R = (O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ называются координаты вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$.

Евклидовость векторного пространства V позволяет ввести длину вектора по формуле $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$. Можно определить угол $\varphi \in [0, \pi]$ между векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$ равенством $\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$[1].

Следующие выделенные утверждения являются аксиомами в учебнике Погорелова.

$ПI_1$. Для любой прямой l существуют точки, как лежащие на прямой l, так и не принадлежащие прямой l.

■ Из определения прямой следует, что ей принадлежит бесконечное множество точек. Пусть $l = \{M \in E | \overline{M_0M} \in V^1\}$ - прямая, $\overline{a} \notin V^1$. Тогда точка N такая, что $\overline{M_0N} = \overline{a}$ не принадлежит прямой l. ■

[1]Подробно в курсе алгебры, тема "Евклидовы векторные пространства".

ΠI_2. Через две различные точки проходит единственная прямая.

■ Пусть A и B - различные точки из E. Прямая $l = (A, \{\overline{AB}\})$ проходит через точки A и B. Если $l' = (Q, V^1)$ еще одна прямая, проходящая через точки A и B, то можно записать, что $l' = (A, V^1)$, а так как $B \in l'$, то $\overline{AB} \in V^1$. Следовательно $V^1 = \{\overline{AB}\}$, а $l = l'$. ■

Будем писать, что $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, если $\overline{a} = \lambda\overline{b}$ и $\lambda > 0$.

Отрезком с концами в точках A и B ($A \neq B$) называется множество $AB = \{X \in E | \overline{AX} \uparrow\uparrow \overline{XB}\}$. Точка $X \in AB$ называется внутренней точкой отрезка, точки A, B - граничные точки отрезка. Граничные точки не принадлежат отрезку.

Свойства отрезков: 1). $AB = BA$. 2). $X \in AB \iff$ для любой точки $O \in E$ вектор $\overline{OX} = (1-\lambda)\overline{OA} + \lambda\overline{OB}$ при некотором $\lambda \in (0,1)$.

■ 1). Если $X \in AB$, то $\overline{AX} = \lambda\overline{XB}$, при $\lambda > 0$. Отсюда следует, что $-\overline{AX} = \lambda(-\overline{XB})$ или $\overline{XA} = \lambda\overline{BX}$ или $\overline{BX} = \lambda^{-1}\overline{XA}$. Поэтому $X \in BA$. Таким образом, $AB \subset BA$. Аналогично можно показать, что $BA \subset AB$. Отсюда $AB = BA$.

2). Пусть $X \in AB$: $\overline{AX} = \tau\overline{XB}$ при $\tau > 0$. Отсюда, применяя аксиому 2 евклидова пространства, можно записать, что $\overline{AO} + \overline{OX} = \tau(\overline{XO} + \overline{OB})$ или $\overline{OX} = \frac{1}{1+\tau}\overline{OA} + \frac{\tau}{1+\tau}\overline{OB}$. Пусть $\lambda = \frac{\tau}{1+\tau}$. Тогда $\lambda \in (0,1)$ и $\overline{OX} = (1-\lambda)\overline{OA} + \lambda\overline{OB}$. ■

Точка M лежит между точками A и B (и пишем $A - M - B$), если M - внутренняя точка отрезка.

ΠII_1. Из трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

■ Пусть A, B, C - различные точки прямой l. Тогда $l = (A, \{\overline{AB}\})$. Так как $C \in l$, то $\overline{AC} \in \{\overline{AB}\}$ или $\overline{AC} = \lambda\overline{AB}$ (1), где $\lambda \neq 0, 1$. Возможны следующие случаи: a) $\lambda \in (0,1)$. Перепишем (1) в виде $\overline{AC} = \lambda(\overline{AC} + \overline{CB})$ или $\overline{AC} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\overline{CB}$. Следовательно, $A - C - B$. b) $\lambda > 1$. Из (1): $\overline{AB} + \overline{BC} = \lambda\overline{AB}$ или $\overline{AB} = (1-\lambda)^{-1}\overline{BC}$. Следовательно, $A - B - C$. c) $\lambda < 0$. Из (1): $\overline{CA} = -\lambda\overline{AB}$ и $C - A - B$. ■

ΠII_2. Прямая разбивает множество не принадлежащих ей точек на два подмножества (каждое называется полуплоскостью) так, что отрезок, соединяющий точки одной полуплоскости, не пересекается с прямой, а отрезок, соединяющий точки разных полуплоскостей, пересекается с прямой.

■ Пусть l - прямая. Пусть $R = (A, B, C)$ система координат такая, что точки $A, B \in l$. Обозначим через π_+ (π_-) множество точек $M(x,y)$ евклидовой плоскости таких, что $y > 0$ ($y < 0$). Эти множества и есть полуплоскости, ограниченные прямой l. Ясно, что полуплоскости, ограниченные прямой l, не пересекаются. Рассмотрим две точки $M(x_1, y_1) \in \pi_+$ и $N(x_2, y_2) \in \pi_-$. Тогда $y_1 > 0$, $y_2 < 0$. Пусть X - произвольная точка отрезка MN. Тогда $\overline{OX} = (1-\lambda)\overline{OM} + \lambda\overline{ON}$, $\lambda \in (0,1)$. В координатах: $\overline{OX} = ((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$. Следовательно, $X((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$. Возьмем $\lambda = \frac{y_1}{y_1 - y_2}$. Тогда $\lambda \in (0,1)$, а точка отрезка MN, соответствующая этому значению λ, имеет координаты $X((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, 0)$ и поэтому принадлежит l. Значит, отрезок MN пересекает прямую l.

Если точки $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ принадлежат одной полуплоскости, скажем, π_+, то $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$. Поэтому $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 > 0$ для всех значений $\lambda \in (0,1)$. Это значит, что отрезок MN и прямая l не пересекаются. ■

Треугольником называется множество из трех точек, не принадлежащих одной прямой. Точки называются вершинами треугольника, отрезки с концами в вершинах треугольника - стороны треугольника.

Лучом $[AB)$ с вершиной в точке A, проходящим через точку B, называется множество точек M таких, что либо $A-M-B$, либо $M=B$, либо $A-B-M$. Отметим, что вершина луча не принадлежит лучу.

Лемма 19.1 $[AB)=\{M|\overline{AM}\uparrow\uparrow\overline{AB}\}$.

■ Точка $M\in[AB)$ тогда и только тогда, когда $\overline{AM}\uparrow\uparrow\overline{AB}$. Действительно, например, отношение $A-M-B$ означает, что $\overline{AM}\uparrow\uparrow\overline{MB}$ или $\overline{AM}=\lambda\overline{MB}$ при $\lambda>0$. Последнее можно переписать так $\overline{AM}=\lambda(\overline{MA}+\overline{AB})$ или $\overline{AM}(1+\lambda)=\lambda\overline{AB}$ или $\overline{AM}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{AB}$, что равносильно отношению $\overline{AM}\uparrow\uparrow\overline{AB}$. Аналогично рассматриваются случаи: $A-B-M$ и $M=B$. ■

Длиной отрезка AB называется длина вектора $\overline{AB}$: $|\overline{AB}|$.

Обозначение длины отрезка: AB. Таким образом: $AB=|\overline{AB}|$.

ΠIII_1. Всякий отрезок имеет определенную длину больше нуля. Длина отрезка равна сумме длин отрезков, на которые он разбивается любой своей точкой.

■ Пусть точка X - точка отрезка AB. Покажем, что $AB=AX+XB$. Так как $X\in AB$, то $\overline{AX}=\lambda\overline{XB}$, при $\lambda>0$. Отсюда $\overline{AX}=\lambda(\overline{XA}+\overline{AB})$ или $\overline{AX}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{AB}$. Аналогично можно получить, что $\overline{XB}=\frac{1}{1+\lambda}\overline{AB}$. Отсюда $|\overline{AX}|+|\overline{XB}|=|\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{AB}|+|\frac{1}{1+\lambda}\overline{AB}|=|\overline{AB}|$.

Углом называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной. Угол называется развернутым, если лучи, его составляющие, дополнительные друг другу.

Лучи $[OA)$ и $[OB)$ образуют угол, который будем обозначать $\angle AOB$. Величиной угла $\angle AOB$ называется угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Обозначение величины угла такое же, как и обозначение угла - $\angle AOB$.

Будем говорить, что луч с вершиной в вершине данного угла проходит между сторонами этого угла, если он пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла.

Лемма 19.2 *Пусть луч $[OC)$ проходит между сторонами угла $\angle AOB$. Тогда $\overline{OC}=\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB}$ при $\alpha>0$, $\beta>0$.*

■ Пусть точка C' принадлежит пересечению отрезка AB и луча $[OC)$. Тогда из свойств отрезка $\overline{OC'}=(1-\lambda)\overline{OA}+\lambda\overline{OB}$ при $\lambda\in(0,1)$. Так как $C'\in[OC)$, то найдется $\tau>0$ такое, что $\overline{OC}=\tau\overline{OC'}=\tau((1-\lambda)\overline{OA}+\lambda\overline{OB})$. Осталось обозначить $\alpha=\tau(1-\lambda)>0$, $\beta=\tau\lambda>0$. ■

ΠIII_2. Если луч $[OC)$ проходит между сторон угла $\angle AOB$, то

$$\angle AOB=\angle AOC+\angle COB \tag{2}$$

■ Обозначим углы в (2) через φ, φ_1, φ_2 соответственно. Так как каждый угол принадлежит интервалу $[0,\pi]$, то утверждение (2) равносильно равенству: $\cos\varphi=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$ (3) при условии, что $\sin(\varphi_1+\varphi_2)\geqslant 0$. Докажем это равенство и проверим выполнение условия. Можно считать, что $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=|\overline{OC}|=1$. Введем обозначение $a=\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\cos\varphi$. Так как луч $[OC)$ проходит между сторонами угла $\angle AOB$, то $\overline{OC}=\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB}$ для некоторых значений $\alpha>0$ и $\beta>0$. Найдем скалярные произведения $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=\overline{OA}\cdot(\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB})=\alpha+\beta a$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=\overline{OB}\cdot(\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB})=\alpha a+\beta$. Отсюда $\cos\varphi_1=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OC}}{|\overline{OA}||\overline{OC}|}=\overline{OA}\cdot\overline{OC}=\alpha+\beta a$, $\sin\varphi_1=+\sqrt{1-\cos\varphi_1{}^2}=\sqrt{1-(\alpha+\beta a)^2}=\sqrt{1-\alpha^2-2\alpha\beta a-\beta^2a^2}$. Так как $|\overline{OC}|=1$, то $(\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB})^2=1$ или $\alpha^2+2\alpha\beta a+\beta^2=1$. Отсюда получаем, что $\sin\varphi_1=\beta\sqrt{1-a^2}$.

Аналогично можно получить $\cos\varphi_2 = \alpha a + \beta$, $\sin\varphi_2 = \alpha\sqrt{1-a^2}$.

Перепишем равенство (3) в виде: $\cos\varphi = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2$ и, подставив сюда найденные значения функций, получим, что $a = (\alpha+\beta a)(\alpha a+\beta) - \alpha\beta(\sqrt{1-a^2})^2$. Легко видеть, что последнее равенство выполняется при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $|a| \leqslant 1$. Осталось заметить, что при $-1 \leqslant a \leqslant 1$ $\sin(\varphi_1+\varphi_2) = \beta\sqrt{1-a^2}(\alpha a+\beta) + \alpha\sqrt{1-a^2}(\alpha + \beta a) \geq \sqrt{1-a^2}(\beta(-\alpha+\beta)+\alpha(\alpha-\beta)) = \sqrt{1-a^2}(\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$. ■

Рассмотрим аксиомы IV группы.

ΠIV_1. От начала любого луча можно отложить единственный отрезок заданной длины.

ΠIV_2. От любого луча в заданную полуплоскость можно отложить единственный угол заданной градусной меры.

ΠIV_3. Каковы бы ни были треугольник и луч, существует треугольник, равный данному у которого первая вершина лежит в начале луча, вторая на луче, а третья в заданной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч.

Определение равенства треугольников такое же, как в школьном курсе геометрии - два треугольника равны, если соответствующие углы и стороны этих треугольников равны.

Докажем ΠIV_3. ■ Пусть даны треугольник $\triangle ABC$ и луч $[PQ)$. Возьмем две декартовы системы координат $R = (A, \overline{i}, \overline{j})$ и $R' = (P, \overline{i'}, \overline{j'})$ так, чтобы вектор $\overline{i} \uparrow\uparrow \overline{AC}$, вектор $\overline{j}$ направлен в полуплоскость, ограниченную прямой AB и содержащую точку C, вектор $\overline{i'} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$, вектор $\overline{j'}$ направлен в заданную полуплоскость, ограниченную прямой PQ. Возьмем точки A', B', C', имеющие в системе координат R' такие же координаты, как и точки A, B, C в системе координат R. Получим треугольник, отложенный от данного луча $[PQ)$ в заданную полуплоскость. Так координаты соответствующих вершин этих треугольников равны, то у них равны и длины соответствующих сторон и соответствующие углы, так как углы и стороны вычисляются через координаты точек по известным формулам. ■

Из утверждения ΠIV_3 следуют и утверждения ΠIV_1 и ΠIV_2 - если можно отложить треугольник от данного луча в заданную полуплоскость, то можем отложить и отрезок и угол от заданного луча в заданную полуплоскость. Докажем единственность.

■ Допустим, что от вершины луча $[AB)$ можно отложить два отрезка AP и AQ, равные данному отрезку CD. Тогда $|\overline{AP}| = |\overline{CD}|$ и $|\overline{AQ}| = |\overline{CD}|$. Отсюда $|\overline{AP}| = |\overline{AQ}|$. Так как $P, Q \in [AB)$, то $\overline{AP} \uparrow\uparrow \overline{AB}$ и $\overline{AQ} \uparrow\uparrow \overline{AB}$. Отсюда следует, что $\overline{AP} \uparrow\uparrow \overline{AQ}$, а из равенства длин этих векторов следует равенство $\overline{AP} = \overline{AQ}$. Из аксиомы 1) Вейля получаем, что $P = Q$. ■

Единственность откладывания угла следует из утверждения ΠIII_2. ■ Если от луча $[AB)$ можно отложить два (геометрически) различных угла, одновременно равных по величине φ, то сторона одного из них должна проходить между сторон другого. Из ΠIII_2 следует, что $\varphi = \psi + \varphi$, где ψ есть величина угла, образованного сторонами этих углов, не принадлежащих лучу $[AB)$. Получаем, что $\psi = 0$. ■

ΠV. Через точку A, не принадлежащую прямой a, в плоскости, содержащей прямую a и точку A, можно провести только одну прямую, не пересекающую a.

■ Пусть точка A не принадлежит прямой a. Если $a = (B, V^1)$, то прямая $b = (A, V^1)$ проходит через точку A и не пересекает прямую a. Действительно, если бы нашлась точка $X \in a$ и $X \in b$, то $\overline{AX} \in V^1$, $\overline{BX} \in V^1$. Отсюда $\overline{BA} = \overline{BX} + \overline{XA} \in V^1$ и, следовательно, точка $A \in a$.

Покажем, что любая другая прямая $c = (B, W^1)$, проходящая через точку B и отличная от b (то есть $W^1 \neq V^1$), пересекает прямую a. Так как $W^1 \neq V^1$, то базисные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ подпространств W^1 и V^1 соответственно образуют базис пространства переносов V. Поэтому $\overline{AB} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ при некоторых x, y. Пусть $C \in a$ такая, что $\overline{AC} = y\bar{e}_2$. Тогда $\overline{AB} = x\bar{e}_1 + \overline{AC}$, отсюда $\overline{BC} = -x\bar{e}_1$ и точка C принадлежит прямой c. Прямые a и c пересекаются. ■

19.4 Независимость аксиомы параллельности от аксиом абсолютной геометрии

В этом параграфе дадим решение проблемы V постулата Евклида. При этом будем рассматривать систему аксиом евклидовой геометрии в формулировке Гильберта. Покажем, что аксиома параллельности V не зависит от аксиом абсолютной геометрии $I - IV$. Для доказательства независимости аксиомы параллельности надо построить такую реализацию системы аксиом абсолютной геометрии, в которой бы аксиома параллельности не выполнялась.

Вспомогательные отображения

Пусть на плоскости введена декартова система координат. Обозначим через Ω - открытый круг $x^2 + y^2 < 1$. Рассмотрим следующие два вида отображений:

$$1)\quad \begin{cases} x' = x\cos t \pm y \sin t, \\ y' = x \sin t \mp y \cos t; \end{cases} \qquad \text{и} \qquad 2)\ H_\beta: \begin{cases} x' = \frac{x\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta y}, \\ y' = \frac{y+\beta}{1+\beta y} \end{cases} \qquad |\beta| < 1.$$

Отображения 1) являются поворотами плоскости около начала координат и симметриями относительно координатных прямых и поэтому переводят круг Ω в себя. Покажем, что отображения вида 2) переводят круг Ω в себя при любом β, если $|\beta| < 1$. Так как $x'^2 + y'^2 = \frac{(x\sqrt{1-\beta^2})^2}{(1+\beta y)^2} + \frac{(y+\beta)^2}{(1+\beta y)^2} = \frac{1}{(1+\beta y)^2}((1+\beta y)^2 + (1-\beta^2)(x^2+y^2-1)) = 1 - (1-\beta^2)(1-x^2-y^2)) < 1$ как только $x^2 + y^2 < 1$, то образ (x', y') точки $(x, y) \in \Omega$ относительно отображения H_β принадлежит кругу Ω.

Обозначим через D множество всех преобразований вида 1) и 2) и их композиций. Заметим, что преобразования из D есть частный случай преобразований вида

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ax + by + c} \tag{1}$$

Преобразования вида (1) есть проективные преобразования, записанные в неоднородных координатах, поэтому и преобразования 1) и 2) есть проективные преобразования.

Свойства преобразований из D.

1). Преобразования из D преобразует прямую в прямую, так как такие преобразования переводят расширенную евклидову прямую в расширенную евклидову прямую. Поэтому преобразования из D переводят хорду круга Ω в хорду круга Ω.

2). Так как проективное преобразование сохраняет сложное отношение четырех точек, то таким же свойством обладают преобразования из D.

3). Любое преобразование из D сохраняет порядок точек прямой. ■ Пусть точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ лежат на прямой l. Считаем для определенности, что прямая l не параллельна оси OY. Тогда l можно задать уравнением вида $y = kx + b$. В первой формуле (1) заменим y на $kx + b$ и, после преобразований, получим

$$x' = \frac{\alpha x + \delta}{\gamma x + \tau}. \tag{2}$$

Так как производная

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{\alpha\tau - \gamma\delta}{(\gamma x + \tau)^2}$$

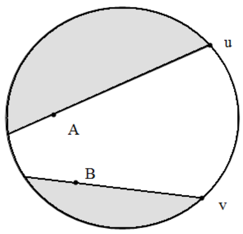
сохраняет один и тот же знак при всех значениях x, то функция $x' = x'(x)$, определенная равенством (2), строго монотонная функция. (Заметим, что $\alpha\tau - \gamma\delta \neq 0$, в противном случае функция (2) была бы константой, а соответствующее отображение не было бы преобразованием). Пусть теперь $A - B - C$, тогда $x_1 < x_2 < x_3$ (или $x_1 > x_2 > x_3$). Так как функция (2) строго монотонна, то координаты образов A', B', C' точек A, B, C обладают таким же свойством $x'_1 < x'_2 < x'_3$ (или $x'_1 > x'_2 > x'_3$). Это значит, что $A' - B' - C'$ что и доказывает утверждение. ■

Из этого свойства следует, что преобразования из D преобразуют отрезок в отрезок, луч в луч, полуплоскость в полуплоскость.

4). Легко проверить, что множество D есть группа относительно композиции преобразований.

5). Пусть l_1, l_2 - два луча. Существует преобразование $f \in D$ такое, что $f(l_1) = l_2$.

■ Пусть точка $A(x_0, y_0)$ - вершина луча l_1. Пусть P - поворот плоскости относительно начала координат (преобразование вида 1)), переводящий точку A в точку $A_1(0, y'_0)$. При этом луч l_1 перейдет в луч $P(l_1)$. Возьмем $\beta = -y'_0$ и найдем образ A_1 относительно H_β, $\beta = -y'_0$. Получим, что образом точки A_1 будет начало координат. При этом луч $P(l_1)$ преобразуется в луч $g_1 = H_\beta(P(l_1))$ с вершиной в начале координат. Таким образом, нашлось преобразование $f_1 = H_\beta \circ P$, переводящее луч l_1 в луч g_1 с вершиной в начале координат. Аналогично, найдется преобразование f_2, переводящее луч l_2 в луч g_2 с вершиной в начале координат. Пусть φ - поворот плоскости, переводящий луч g_2 в луч g_1. Тогда преобразование $f_1^{-1} \circ \varphi \circ f_2$ - искомое преобразование. ■



6). Обозначим через $([A, u), F)$ - сегмент круга Ω, ограниченный хордой, проходящей через точку A с концом в точке u границы Ω. Пусть $([B, u), G)$ - другой сегмент. Тогда существует преобразование из D, переводящее первый сегмент во второй так, что точка $A \to B$, а $u \to v$. Доказательство аналогично доказательству свойства 5) для лучей. Применяя преобразования (1), переводим лучи $[A, u)$ и $[B, v)$ порознь в положительную полуось оси OX. Если при этом образы сегментов не совпадут, то надо применить симметрию относительно оси OX.

Построение реализации

Построим реализацию аксиом абсолютной геометрии, в которой не выполняется аксиома параллельности. Реализацию будем строить в открытом круге Ω евклидовой плоскости, построенной на системе аксиом Гильберта. Основными объектами будем считать точки круга Ω, в качестве прямых возьмем хорды круга. Точка хорды разбивает хорду на два отрезка, каждый из которых назовем лучом в модели с вершиной в данной точке. Два луча с общей вершиной образуют угол. Прямая разбивает Ω на два сегмента, каждый из которых называется полуплоскостью, ограниченной данной прямой-хордой. Основные отношения "принадлежать" и "между" такие же, как и на евклидовой плоскости. Преобразования из множества D назовем движениями круга Ω. Соответствующие отрезки при таком движении будут считаться конгруэнтными: отрезки $AB \equiv CD$, если существует движение $f \in D$ такое, что $C = f(A)$, $D = f(B)$. Аналогично определяется конгруэнтность углов. Отметим, что конгруэнтность углов в модели Ω не есть конгруэнтность углов в евклидовом смысле, так как преобразования вида (1) не являются, в общем случае, подобием.

Проверим выполнение аксиом $I - IV$ системы аксиом Гильберта.

Группы аксиом I, II автоматически выполняются.

Проверим аксиому III_1. Пусть CD - произвольный отрезок, $[AB)$ - произвольный луч. Пусть движение $f \in D$ переводит луч $[CD)$ в $[AB)$ так, что $f(C) = A$. Пусть $D_1 = f(D)$. Тогда $CD \equiv AD_1$. Покажем, что точка D_1 единственна.

■ Предположим противное - существует движение $f_1 \in D$, переводящее луч $[CD)$ в $[AB)$ так, что $f_1(C) = A$, но $f_1(D) = D_2 \neq D_1$. Пусть u, v - концы хорды CD, тогда $u' = f(u)$, $v' = f(v)$ - концы хорды AB. Так как отображения f и f_1 сохраняют сложное отношение четырех точек, то $(C, D; u, v) = (A, D_1; u', v')$, и $(C, D; u, v) = (A, D_2; u', v')$. Следовательно, $(A, D_1; u', v') = (A, D_2; u', v')$. Отсюда и из свойств сложного отношения четырех точек (см. §10.15) следует, что $D_1 = D_2$. ■

Аксиомы III_2, III_5 следуют из того, что D - группа.

Проверим аксиому III_3. Пусть отрезки AB и BC без общих внутренних точек принадлежат прямой a, отрезки $A'B'$ и $B'C'$ без общих внутренних точек принадлежат прямой a'. Пусть $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$. Покажем, что $AC \equiv A'C'$.

■ Так как $AB \equiv A'B'$, то существует движение f такое, что $f(A) = A'$, $f(B) = B'$. Из аксиомы III_1 следует, что и $f(C) = C'$. Следовательно $AC \equiv A'C'$. ■

Проверим аксиому III_4. Заметим, что углы с вершиной в точке O, конгруэнтные в смысле модели Ω, являются конгруэнтными и в евклидовом смысле, так как если два таких угла в евклидовом смысле конгруэнтны, то поворот плоскости с центром в начале координат переводит один из таких углов в другой. Но повороты с центром в начале координат принадлежат D. Поэтому углы будут конгруэнтны и в смысле модели Ω. Верно и обратное утверждение. Преобразования вида 1) и 2), оставляющие на месте начало координат, есть повороты плоскости относительно начала координат и отражения от осей координат. Поэтому, если два угла с вершинами в O конгруэнтны в модели, то они будут конгруэнтны и в евклидовой геометрии.

Пусть теперь даны угол $\angle(k, l)$ и луч a с вершиной в точке A. Покажем, что существуют единственные лучи b' и b'' с вершиной в точке A, расположенные по разные стороны от луча a и такие, что $\angle(a, b') \equiv \angle(k, l)$ и $\angle(a, b'') \equiv \angle(k, l)$.

■ Пусть луч a' с вершиной в O принадлежит положительной полуоси оси OX. Движениями из D переведем угол $\angle(k, l)$ в углы $\angle(a', l')$ и $\angle(a', l'')$ расположенные по разные стороны от a' (см. свойство 6 движений). Найдется движение, переводящее луч a' в луч a. При этом углы $\angle(a', l')$ и $\angle(a', l'')$ преобразуются в конгруэнтные углы $\angle(a, b')$ и $\angle(a, b'')$. Так как конгруэнтность транзитивна, то углы $\angle(a, b')$ и $\angle(a, b'')$ по отдельности конгруэнтны углу $\angle(k, l)$ и существование углов доказано. Допустим, что в одну сторону от луча a можно отложить два угла, конгруэнтных углу $\angle(k, l)$. Переведем движением из D эти углы в углы с вершиной в начале координат. Получим конгруэнтные углы в смысле модели Ω. Но такие углы конгруэнтны в смысле евклидовой геометрии. По аксиоме III_3 евклидовой геометрии такие углы должны совпадать. Отсюда следует единственность откладывания угла. ■

Из выполнения аксиом III_1 и III_4 и определения конгруэнтности в модели Ω вытекает и аксиома III_6.

Аксиомы IV_1, VI_2 эквивалентны аксиоме Дедекинда, справедливость которой в модели Ω очевидна.

Аксиома параллельности V не выполняется в модели Ω! Через точку, не принадлежащую данной прямой, можно провести бесконечно много прямых-хорд, не пересекающихся с данной. Таким образом, построена реализация аксиом абсолютной геометрии, в которой не выполняется аксиома параллельности. Следовательно, аксиома параллельности не зависит от аксиом абсолютной геометрии и поэтому доказать аксиому параллельности или утверждение ей равносильное, исходя из аксиом абсолютной геометрии невозможно.

19.5 Непротиворечивость системы аксиом Лобачевского

Система аксиом Лобачевского состоит из аксиом абсолютной геометрии Гильберта $I - IV$ и аксиомы Лобачевского

$V_л$. Через точку A, не принадлежащую прямой a, в плоскости, определенной прямой a и точкой A, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие прямую a.

Геометрия построенная на аксиомах Лобачевского называется **гиперболической геометрией** (или геометрией Лобачевского).

Вопрос непротиворечивости системы аксиом Лобачевского долгое время оставался открытым. В 1861 г. итальянский математик Бельтрами установил, что локально на псевдосфере выполняется геометрия Лобачевского. Но это открытие не являлось еще полным доказательством непротиворечивости системы аксиом Лобачевского. Позднее были построены модели плоскости Лобачевского французским ученым Пуанкаре в евклидовой полуплоскости и математиками Кели и Клейном в открытом круге евклидовой плоскости.

Модель Пуанкаре [5] строится на открытой евклидовой полуплоскости. Прямыми в модели Пуанкаре являются полуокружности с центрами на прямой x, ограничивающей полуплоскость и лучи, перпендикулярные прямой x с вершиной на прямой x. Конгруэнтность фигур определяется на основе движений, роль которых выполняют композиции инверсий относительно окружностей с центрами на прямой x.

Модель Кели-Клейна плоскости Лобачевского рассмотрена в предыдущем параграфе, так как там построена реализация системы аксиом Лобачевского на евклидовой плоскости. Поэтому справедлива следующая

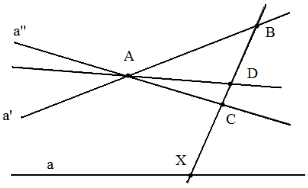
Теорема 19.3 (Кели-Клейн, Пуанкаре) *Система аксиом геометрии Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива арифметика.*

20 Геометрия Лобачевского

20.1 Параллельные прямые на плоскости Лобачевского

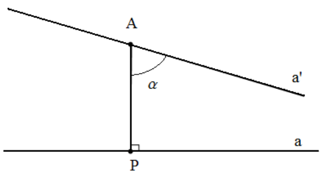
Рассмотрим некоторые следствия из аксиом планиметрии гиперболической геометрии. Под аксиомами гиперболической геометрии будем понимать аксиомы планиметрии абсолютной геометрии в формулировке Гильберта $I_1 - I_3$, $II - IV$ и аксиому Лобачевского $V_л$.

1). Пусть a - некоторая прямая, точка $A \notin a$. Тогда через точку A проходит бесконечно много прямых, не пересекающих прямую a.



■ Согласно аксиоме $V_л$ через точку A проходит две различные прямые a' и a'', не пересекающие прямую a. Прямая a'' разбивает плоскость на две открытые полуплоскости. Возьмем на прямой a' точку $B \neq A$, так чтобы B и прямая a лежали в разных полуплоскостях. Пусть X - произвольная точка a. Тогда отрезок BX пересекает a'' в некоторой точке C и $C \neq B$. Пусть точка $D \in CB$. Тогда прямая AD не пересекает прямую a. Если бы она пересекла бы прямую a в точке M, то, применяя к треугольнику DMX и прямой AC аксиому Паша, получили бы, что прямая AC пересекает a, что не так. Отрезок имеет бесконечно много точек, значит, есть бесконечно много прямых, не пересекающих прямую a. ■

2) **Угол параллельности.** Пусть a - прямая, точка $A \notin a$. Пусть AP - перпендикуляр, опущенный на прямую, $P \in a$. Обозначим через α величину угла между лучом $[AP)$ и прямой a', проходящей через точку A и не пересекающей прямую a. Пусть

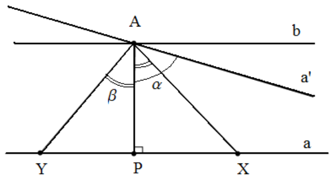


$$\alpha_0 = \inf \alpha,$$

где inf берется по всем прямым, проходящим через точку A и не пересекающим прямую a. Число α_0 называется **углом параллельности** в точке A относительно прямой a.

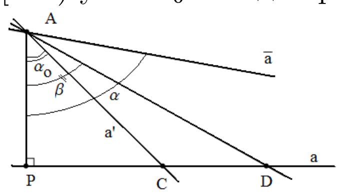
Покажем, что угол параллельности α_0 заключен в пределах $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$.

■ Пусть $XP = YP$ (см. рис) и β - угол $\angle YAP = \angle PAX$. Тогда $\alpha > \beta$ для всех прямых a', проходящих через точку A и не пересекающих прямую a, поэтому $\alpha_0 = \inf \alpha > \beta > 0$. Докажем второе неравенство. Если прямая b, проходящая через точку A, перпендикулярна отрезку AP, то прямые a и b не пересекаются. По аксиоме $V_л$ существует прямая a', не совпадающая с b и не пересекающая a. Так как a' образует с лучом $[AP)$ острый угол α, то $\alpha_0 = \inf \alpha < \frac{\pi}{2}$. ■



Отметим, что, если прямая образует с лучом $[AP)$ угол меньше чем угол параллельности α_0, то такая прямая пересекает прямую a. ■ В противном случае выполнялись бы неравенства $\alpha_0 = \inf \alpha < \alpha_0$. ■

3). Пусть α_0 - угол параллельности в точке A относительно прямой a, AP - перпендикуляр к a, $P \in a$. Проведем через A две прямые a' и a'', составляющие с лучом $[AP)$ угол α_0. Тогда прямые a', a'' не пересекают прямую a.



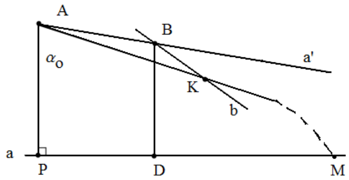
■ Предположим противное, считаем, что прямая a', составляющие с лучом $[AP)$ угол параллельности α_0 пересекают прямую a в точке C. Пусть точка $D \in a$ такая, что $P - C - D$. Тогда луч $[AD)$ составит с лучом $[AP)$ угол $\beta > \alpha_0$ и пересекает a. Если прямая $\overline{a}$ проходит через A и не пересекает a, то эта прямая образует с лучом $[AP)$ угол $\alpha > \beta$. Отсюда $\alpha_0 = \inf \alpha \geqslant \beta > \alpha_0$. Противоречие доказывает утверждение. ■

Пусть α_0 - угол параллельности в точке A относительно прямой a, AP перпендикуляр, опущенный на прямую a, $P \in a$. Прямые a' и a'', проходящие через точку A и образующие угол параллельности α_0 с лучом $[AP)$, называются **граничными прямыми,** проходящими через точку A относительно прямой a. Если прямая a' образует с $[AP)$ угол параллельности слева, то назовем прямую a' левой граничной прямой, а a'' - правой граничной прямой.

Задача. Пусть прямая a', проходящая через точку A, не пересекает прямую a, $AP \perp a$, $P \in a$. Пусть любая прямая b, проходящая через точку A ниже прямой a' справа от AP, пересекает прямую a. Тогда прямая a' - правая граничная прямая.

■ Допустим, что прямая a' образует с перпендикуляром AP справа угол α, который больше угла параллельности α_0 в точке A относительно прямой a. Тогда прямая, образующая с AP справа угол равный α_0 будет проходить ниже прямой a' и, значит, пересекать прямую a. Это противоречит свойству 3). ■

4). Пусть a' - правая граничная прямая в точке A относительно прямой a, $B \in a'$ - произвольная точка. Тогда прямая a' будет правой граничной прямой в точке B



относительно прямой a. ■ Пусть отрезок BD перпендикулярен прямой a, $D \in a$. Покажем, что любая прямая b, проходящая через точку B ниже прямой a' справа от BD, пересекает прямую a. Пусть точка $K \in b$ и расположена ниже прямой a'. Проведем прямую AK. Так как прямая AK проходит ниже a' справа от AP, то она пересекает прямую a в точке, которую обозначим M. Из аксиомы Паша, примененной к треугольнику AMP и прямой b, следует, что прямая b пересекает прямую a. Так как прямая a' не пересекает прямую a, то из задачи следует, что прямая a' будет правой граничной прямой в точке B относительно прямой a. ■

Это свойство позволяет ввести следующее определение односторонней параллельности, то есть параллельности одной прямой по отношению к другой.

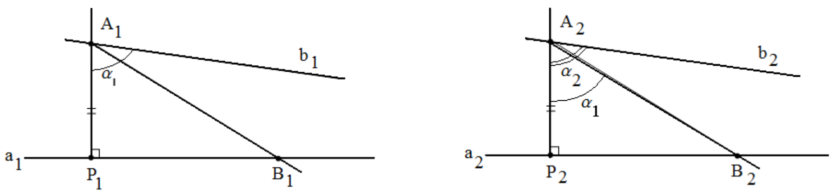
Прямая a называется **параллельной** прямой b вправо (влево), если a есть правая (левая) граничная прямая в произвольной точке $A \in a$ относительно прямой b.

Отметим одно важное свойство угла параллельности.

5). Угол параллельности в точке A относительно прямой a зависит только от расстояния точки A до прямой a.

■ Пусть точка A_i удалена от прямой a_i на расстояние x, $i = 1, 2$.

Пусть α_i - угол параллельности в точке A_i относительно прямой a_i. Покажем, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Предположим противное - допустим, что $\alpha_1 < \alpha_2$. Пусть прямая b_i проходит через точку A_i и параллельна прямой a_i вправо. Построим справа от луча A_2P_2 угол, равный α_1. Так как $\alpha_1 < \alpha_2$, то сторона построенного угла проходит ниже прямой b_2



и, следовательно, пересекает прямую a_2 в точке, скажем, B_2. Пусть точка $B_1 \in a_1$ лежит справа от точки P_1 и $P_1B_1 \equiv P_2B_2$. Тогда треугольник $A_1P_1B_1$ конгруэнтен треугольнику $A_2P_2B_2$. Поэтому $\angle P_1A_1B_1 = \alpha_1$. Так как и прямая b_1 образует с $[A_1P_1)$ угол α_1, то получаем противоречие с аксиомой о единственности откладывания угла. Аналогично можно показать, что $\alpha_1 \not> \alpha_2$. ■

Если обозначим расстояние от точки A до прямой a через x, то угол параллельности в точке A относительно прямой a будет функцией только от x. Эта функции обозначается через $\Pi(x)$ и называется **функцией Лобачевского**. Можно доказать, что

$$\Pi(x) = 2arctge^{\frac{x}{k}},$$

где постоянная $k < 0$ зависит от пространства.

Так как $\lim_{x\to 0}\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$, то на плоскости Лобачевского в малом почти выполняется аксиома параллельности евклидовой геометрии, то есть в малом плоскость Лобачевского можно рассматривать как евклидову плоскость.

Отметим еще одно свойство прямых на гиперболической плоскости.

6). Прямые, перпендикулярные стороне BC острого угла $\alpha = \angle ABC$, могут как пересекать сторону угла AB, так и не пересекать.

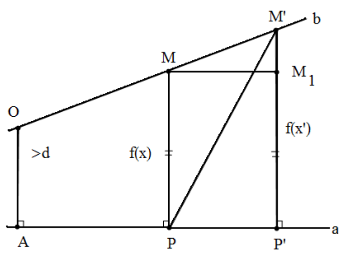
■ Пусть x есть решение уравнения $\Pi(x) = \alpha$. Если прямая a перпендикулярна стороне BC и расстояние от вершины угла B до a равно x, то α будет углом параллельности в точке B относительно прямой a. Поэтому прямая a не пересекает сторону BA, как и все прямые перпендикулярные стороне BC и расположенные правее a. Если прямая a' перпендикулярна BC и расположена левее a, то она пересекает сторону BA. Действительно, если $x' < x$, то $\Pi(x') > \Pi(x)$. Поэтому луч $[BA)$ будет образовывать с $[BC)$ угол, меньший угла параллельности в точке B относительно прямой a', поэтому a' и BA пересекаются. ■

20.2 Свойства параллельных прямых

Покажем, что отношение параллельности прямых вправо (влево) есть отношение эквивалентности.

Лемма 20.1 *Пусть a, b - произвольные прямые, точка $O \in b$, отрезок OA перпендикулярен прямой a, $A \in a$. Пусть точка $M \in b$ такая, что $\angle MOA$ тупой, $x = OM$, а $y = f(x)$ есть длина перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a. Тогда функция $f(x)$ является 1) непрерывной, 2) монотонной и 3) неограниченно возрастающей:* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

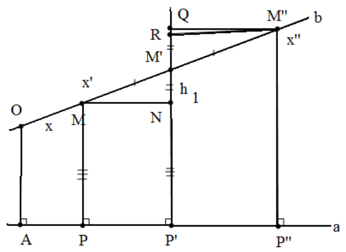
■ Докажем 2): если $x' > x$, то $f(x') > f(x)$. В четырехугольнике $OMPA$ один угол тупой и два прямых при основании AP. Значит, $\angle OMP$ - острый, а $\angle PMM'$ - тупой.



На луче $[P'M')$ возьмем точку M_1 так, чтобы $PM \equiv P'M_1$. Тогда PMM_1P' - четырехугольник Саккери. Следовательно, $\angle PMM_1$ - острый, луч $[MM_1)$ проходит внутри угла PMM' и пересекает сторону PM'. Тогда, применяя к этому лучу и треугольнику $PM'P'$ аксиому Паша, получим, что $[MM_1)$ пересекает сторону $P'M'$, то есть точка M_1 лежит между P' и M'. Отсюда $f(x') = P'M' = P'M_1 + M_1M' > P'M_1 = f(x)$.

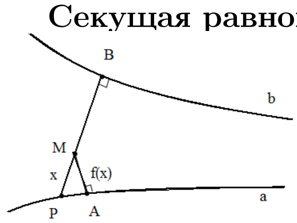
Докажем непрерывность функции $f(x)$. Пусть $x = OM$, $x' = OM'$. Положим $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = f(x') - f(x)$. Тогда $|\Delta x| = MM'$, $|\Delta y| = M_1M'$. Из неравенства $M_1M' < M_1M + MM'$ получим $M_1M' < 2MM'$ (так как против большего угла $\angle MM_1M' > \angle MM'M_1$ лежит и большая сторона) или $|\Delta y| < 2|\Delta x|$. Устремим $\Delta x \to 0$, получим, что и $\Delta y \to 0$. Это доказывает непрерывность.

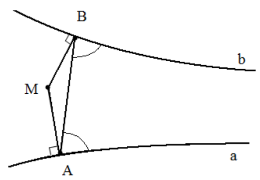
Докажем неограниченность функции $f(x)$. Пусть M, M', M'' последовательные точки на прямой b, такие, что $MM' \equiv M'M''$. Пусть $x = OM$, $x' = OM'$, $x'' = OM''$, $h_1 = f(x') - f(x)$, $h_2 = f(x'') - f(x')$. Тогда $MP = f(x)$, $M'P' = f(x) + h_1$, $M''P'' = f(x) + h_1 + h_2$. Пусть точки N, Q и R такие, что $P'N \equiv PM$, $P'Q \equiv P''M''$, $M'R \equiv M'N$. Теперь заметим, что треугольники $\triangle M'NM$ и $\triangle M'RM''$ конгруэнтны, так как имеют равные углы между равными сторонами. Поэтому $\angle M'RM''$ равен $\angle M'NM$. Угол $\angle M'NM$ - тупой, так как он смежный к острому углу $\angle MNP'$ (PMNP' - четырехугольник Саккери). Значит и $\angle M'RM''$ - тупой угол.



Угол $\angle M'QM''$ - острый, так как $P'QM''P''$ - четырехугольник Саккери. Из сравнения углов $\angle M'QM''$ и $\angle M'RM''$ следует, что $M' - R - Q$, то есть $M'Q > M'R$ или $h_2 > h_1$. Отсюда получаем: $MP = f(x)$, $M'P' = f(x) + h_1$, $M''P'' = f(x) + h_1 + h_2 > f(x) + 2h_1$. Если положим $s = MM' = M'M''$ и возьмем на прямой b справа от O точки, удаленные от O на $x_1 = x$, $x_2 = x + s$, $x_3 = x + 2s, \ldots$, то получим соответствующие значения функции $y = f(x_1)$, $f(x_2) = y + h_1$, $f(x_3) > y + 2h_1$, $f(x_3) > y + 3h_1$ и так далее. Отсюда получаем, что $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. ■

Секущая равного наклона. Рассмотрим одно свойство параллельных прямых. Пусть прямая a параллельна прямой b вправо. Сначала покажем, что существуют точки, равноудаленные от этих прямых. ■ Пусть точка $P \in a$, $PB \perp b$, $B \in b$. Пусть точка M принадлежит отрезку PB, отрезок $MA \perp a$, $A \in a$. Если обозначим расстояния $x = PM$, $f(x) = MA$, то по лемме, функция $f(x)$ есть непрерывная функция, функция $\varphi(x) = PB - x$ также непрерывная. Так как $f(0) - \varphi(0) = -PB < 0$, а $f(PB) - \varphi(PB) = > 0$, то в некоторой точке M отрезка PB справедливо равенство $f(PM) - \varphi(M) = 0$, то есть $MA = MB$. ■

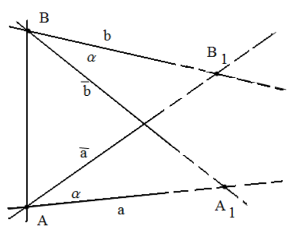




Для такой точки M треугольник $\triangle AMB$ равнобедренный, углы при основании у него равны, поэтому прямая AB образует равные углы с прямыми a и b. Такая прямая AB называется **секущей равного наклона** для прямых a и b.

Докажем теперь симметричность отношения параллельности.

Если прямая a параллельна прямой b вправо (влево), то и прямая b параллельна прямой a вправо (влево).



Пусть прямая AB есть секущая равного наклона прямых a и b, $A \in a$, $B \in b$. Считаем, что прямая a параллельна прямой b вправо. Покажем, что прямая b параллельна прямой a вправо. Для этого достаточно показать, что прямая b есть граничная прямая в точке B относительно прямой a.

■ Пусть $\overline{b}$ - луч с вершиной в точке B, проходящий ниже прямой b и справа от AB. Пусть α - угол между b и $\overline{b}$. Пусть луч $\overline{a}$ с вершиной в точке A образует угол α с прямой a расположен справа от AB и выше прямой a. Так как прямая a параллельна прямой b вправо, то луч $\overline{a}$ пересекает прямую b в некоторой точке, которую обозначим через B_1. Отложим на прямой a справа от точки A отрезок AA_1 равный BB_1. Так как AB - секущая равного наклона, то треугольник BB_1A конгруэнтен треугольнику ABA_1. Отсюда следует, что луч

$[BA_1)$ составляет с прямой b угол α. По аксиоме III_4 луч $\bar{b}$ совпадает с лучом $[BA_1)$ и поэтому пересекает прямую a. Следовательно b - есть граничная прямая в точке B относительно прямой a. ■

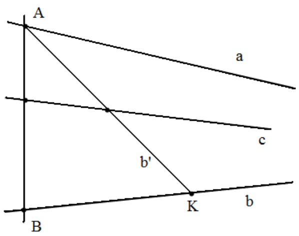
Симметричность отношения параллельности позволяет ввести следующее более общее определение.

Прямые a и b называется **параллельными** вправо (влево), если прямая a параллельна прямой b вправо (влево).

Для доказательства транзитивности отношения параллельности, введем понятие полосы.

Полосой между двумя параллельными прямыми a и b называется часть плоскости, заключенная между этими прямыми и не содержащая их. То есть, если π_a - полуплоскость, ограниченная прямой a и содержащая прямую b, π_b - полуплоскость, ограниченная прямой b и содержащая прямую a, то **полосой** называется множество $\pi_a \cap \pi_b$.

Свойство полосы. Пусть прямые a, b параллельны вправо. Пусть прямая c расположена в полосе, ограниченной прямыми a и b и параллельна прямой b вправо. Тогда любой отрезок с концами, принадлежащими прямым a и b, пересекает прямую c.

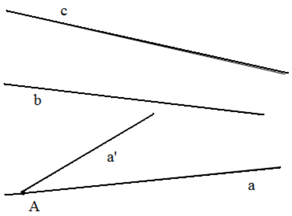


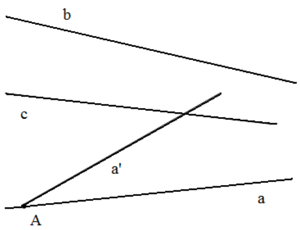
■ Пусть AB - отрезок с концами на прямых a и b. Пусть b' - произвольный луч с вершиной в точке A, расположенный справа от прямой AB и в той же полуплоскости относительно прямой b в которой лежат прямые a и c. Так как прямая b параллельна a и c, то луч b' пересекает прямые a и c. Пусть K - точка пересечения луча b' с a. Так как прямая c пересекает сторону AK треугольника ABK, то по аксиоме Паша она пересечет и сторону AB. ■

Доказываем транзитивность отношения параллельности.

Две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении (вправо или влево) параллельны между собой в том же направлении.

■ Пусть прямые a, b параллельны прямой c вправо. Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые (a и b), граничные прямой c вправо. Рассмотрим два случая. 1). Прямые a и b расположены с одной стороны от прямой c. Тогда прямая b (с точностью до переобозначения) принадлежит полосе z, ограниченной прямыми a и c. Пусть точка $A \in a$. Покажем, что прямая a есть граничная прямая для b в точке A. Допустим, что есть луч a' с вершиной в A, образующий малый угол с прямой a вправо от точки A, не пересекающий прямую b и принадлежащий полосе z. Тогда a' не пересекает и c по свойству полосы, а это противоречит параллельности a и c. Таким образом, пряма a не пересекает прямую b, но любая прямая, расположенная выше a - пересекает b. Следовательно, прямая a параллельна прямой b вправо (см. задачу в 21.1).





2). Пусть прямые a и b расположены по разные стороны от прямой c. Тогда b и c лежат по одну сторону от a.

■ Пусть a' - луч с вершиной в точке $A \in a$, принадлежит полуплоскости, содержащей прямые b и c, и направлен вправо (вправо, например, от перпендикуляра, опущенного из точки A на b). Так как a и c параллельны, то луч a' пересекает прямую c, а так как c и b параллельны, то этот луч пересечет и b. Значит a - граничная прямая в точке A относительно прямой b, то есть, прямая a - параллельна прямой b вправо. ■

Таким образом, параллельные в одну сторону прямые на плоскости Лобачевского ведут себя так же, как и параллельные прямые на евклидовой плоскости.

20.3 Взаимное расположение расходящихся и параллельных прямых

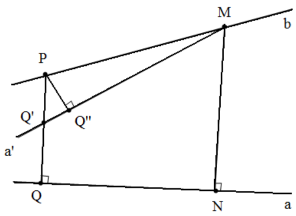
Две прямые плоскости Лобачевского называются **расходящимися**, если они не параллельны и не пересекаются.

Расходящиеся прямые существуют. Например, расходящимися прямыми будут две прямые, перпендикулярные третьей или две прямые, которые при пересечении третьей прямой образуют равные внутренние накрест лежащие углы.

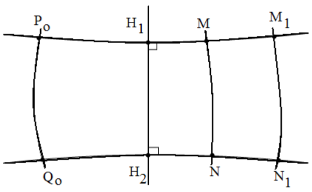
Теорема 20.1 *Пусть a и b - две расходящиеся прямые. Тогда у них существует единственный общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они неограниченно расходятся.*

■ Если предположить, что есть два общих перпендикуляра к прямым a и b, то четырехугольник, образованный перпендикулярами и отрезками прямых, имел бы сумму углов равную $4d$. Если четырехугольник разбить диагональю на два треугольника, то получим, что сумма углов треугольника равна или больше $2d$, что невозможно на плоскости Лобачевского.

Покажем, что расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр. Возьмем



на прямой b точку M. Пусть отрезок $MN \perp a$. Считаем, что прямая b образует с лучом $[MN)$ справа тупой угол (если такой угол равнялся бы d, то все доказано). Через точку M проходит прямая a', параллельная прямой a влево. Так как a и b расходящиеся, то $a' \neq b$ и слева от отрезка MN прямая a' проходит ниже b. Пусть $P \in b$ левее M, отрезок PQ перпендикулярен прямой a, $Q \in a$, отрезок PQ'' перпендикулярен прямой a', $Q'' \in a'$. Точки P и Q расположены в разных полуплоскостях, ограниченных прямой a', поэтому отрезок PQ пересекает a' в точке, которую обозначим Q'. В прямоугольном треугольнике $PQ'Q''$ отрезок PQ'' - катет, PQ' - гипотенуза, поэтому $PQ'' < PQ'$. Так как $PQ = QQ' + Q'P > PQ'$, то $PQ'' < PQ$. Если обозначить $x = MP$, $f(x) = PQ''$, то по лемме предыдущего параграфа, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Таким образом, $PQ \to \infty$, если $MP \to \infty$. Поменяв местами прямые a и b, аналогично получим, что точки прямой a неограниченно удаляются от прямой b. Возьмем теперь слева от точки M на прямой



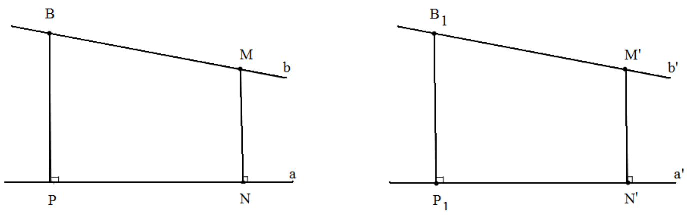
b точку P_0 так, чтобы длина перпендикуляра P_0Q_0, опущенного на прямую a, была бы больше длины MN. Применяя лемму предыдущего параграфа к точкам прямой b, лежащим правее MN, и к прямой a, получим, что справа от MN прямые a и b неограниченно расходятся и поэтому существует отрезок M_1N_1 такой, что его длина равна P_0Q_0. Тогда четырехугольник $P_0Q_0N_1M_1$ есть четырехугольник Саккери. Его серединный перпендикуляр H_1H_2, нижнего снования Q_0N_1, есть прямая симметрии четырехугольника.

Поэтому этот перпендикуляр к нижнему основанию будет перпендикуляром и к верхнему основанию. ■

Теорема 20.2 *Две параллельные прямые неограниченно сближаются в сторону параллельности и неограниченно удаляются друг от друга в противоположном направлении.*

■ Пусть прямая b параллельна прямой a вправо, точка $B \in b$, отрезок BP перпендикулярен прямой a, $P \in a$. Слева от отрезка BP прямая b образует с лучом $[BP)$ тупой угол, следовательно, прямые a и b неограниченно расходятся слева, то есть в направлении, противоположном направлению параллельности.

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число, меньшее длины BP. Покажем, что существует



точка $M \in b$, такая, что длина перпендикуляра MN, опущенного из точки M на прямую a, меньше ε. Возьмем прямую a', точку N' на прямой a', и пусть отрезок $M'N'$, перпендикулярен прямой a' и длины меньше ε. Проведем через точку M' прямую b', параллельную прямой a' вправо. Так как слева от точки M' прямая b' образует с лучом $[M'N')$ тупой угол, то слева от точки M' на прямой b' найдется точка B_1 такая, что длина перпендикуляра B_1P_1, опущенного на прямую a', будет равна BP. Рассмотрим движение плоскости Лобачевского, переводящее прямую a' в прямую a, точку P_1 в точку P, полуплоскость, содержащую прямую b' в полуплоскость, содержащую прямую b. Так как движение сохраняет угол, то отрезок P_1B_1 преобразуется в отрезок PB. Так как угол параллельности зависит только от расстояния точки до прямой, то рассмотренное движение преобразует прямую b' в прямую b. Пусть M и N - образы точек M', N' относительно данного движения. Тогда $M \in b$, $N \in a$, $MN \perp b$ и $MN < \varepsilon$. ■

Следствие. Любые два множества, состоящие из пар параллельных прямых плоскости Лобачевского, конгруэнтны.

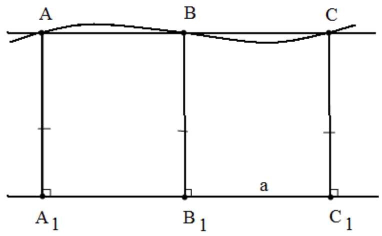
20.4 Окружность, эквидистанта, орицикл

На плоскости Лобачевского есть три вида пучков прямых: 1) множество всех прямых, проходящих через данную точку, 2) пучок расходящихся прямых - множество всех прямых, перпендикулярных данной прямой, называемой **базой** пучка, 3) множество всех прямых, параллельных данной прямой в одном направлении.

На расширенной евклидовой плоскости эти три пучка превращаются в один пучок с собственным или несобственным центром. Таким же образом можно объединить и пучки 1), 3) плоскости Лобачевского, если допустить существование несобственных точек плоскости Лобачевского.

Каждый пучок прямых можно связать с некоторой линией. Можно показать, что каждая из таких линий является ортогональной траекторией соответствующего пучка прямых.

1). **Окружность** - множество точек, равноудаленных от данной точки. Свойства окружности гиперболической плоскости схожи со свойствами евклидовой окружности.



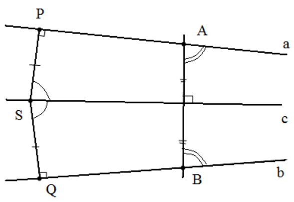
2). **Эквидистанта** прямой a - это множество точек, равноудаленных от a и расположенных по одну от нее сторону.

На евклидовой плоскости эквидистанта есть прямая, параллельная данной прямой. На плоскости Лобачевского эквидистанта - не прямая линия.

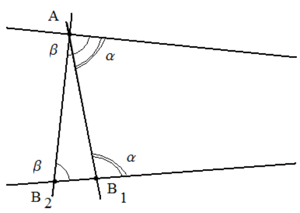
■ Действительно, если предположить, что три точки эквидистанты A, B, C принадлежат одной прямой, то в двух смежных четырехугольниках Саккери при вершине B должны быть острые углы, а это не так. Углы смежные, значит, их сумма равна $2d$. Противоречие показывает, что прямая не может иметь более двух общих точек с эквидистантой, эквидистанта не может быть прямой ■

3). **Орициклы или предельные линии.** Докажем сначала две леммы.

Лемма 20.2 *Пусть a, b - параллельные прямые, точка $A \in a$. Существует единственная секущая равного наклона к прямых a и b, проходящая через точку A.*



■ Обозначим через S точку, равноудаленную от прямых a и b. Пусть SP, SQ есть перпендикуляры, опущенные на прямые a и b соответственно. Пусть c - биссектриса угла $\angle PSQ$. Тогда прямые a и b симметричны относительно прямой c. Пусть B - точка, симметричная точке $A \in a$. Тогда прямая AB - искомая секущая равного наклона, так как в силу симметрии острые углы, образованные прямой AB с прямыми a и b равны.

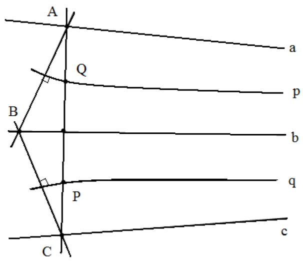


Докажем единственность секущей равного наклона. Предположим, что существуют две такие секущие, проходящие через точку A : AB_1 и AB_2. Пусть α и β - углы образованные первой и второй секущими с прямыми a и b. Для определенности, считаем, что $\alpha < \beta$. Тогда секущие расположены так, как на рисунке. Но α - внешний угол треугольника AB_1B_2, а β - внутренний, с углом α не смежный. Поэтому $\alpha > \beta$. Противоречие доказывает утверждение. ■

Лемма 20.3 *Пусть a, b и c - три прямые, параллельные между собой вправо, точка $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$. Если прямая AB - секущая равного наклона к прямым a и b, прямая BC - секущая равного наклона к прямым b и c, то прямая AC есть секущая равного наклона к прямым a и c.*

■ Считаем, что прямая b принадлежит полосе, ограниченной прямыми a и c. 1). Проведем серединные перпендикуляры p, q к отрезкам AB и BC. Так как прямая AB есть секущая равного наклона к прямым a и b, то серединный перпендикуляр p является осью симметрии для прямых a и b.

Поэтому, прямая a не пересекается с p, в противном случае, в силу симметрии, через их общую точку проходила бы и прямая b, что невозможно, так как прямые a и b - параллельны. Прямые a и p и не расходящиеся прямые. Действительно, прямая p принадлежит полосе, ограниченной прямыми a и b. Прямые a и b - параллельны, значит неограниченно сближаются в сторону параллельности, то есть существуют отрезки с концами на прямых a и b сколь угодно малой длины. Но всякий такой отрезок пересекает и ось симметрии прямых. Поэтому прямая p неограниченно сближается с прямыми a и b. Остается заключить, что прямые a и p, b и p, параллельны вправо. Аналогично получаем, что и b, c и q параллельны вправо. Из транзитивности отношения параллельности следует, что a и b, c, p и q параллельны между собой вправо. 2). Пусть r есть серединный перпендикуляр к отрезку AC. Покажем, что r параллелен прямым p и q. Допустим, что прямые r и p пересекаются в точке S. Тогда S, как точка пересечения двух серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC, была бы центром описанной около треугольника окружности. Через центр проходил бы и третий серединный перпендикуляр q. Получаем противоречие с тем, что прямые p и q параллельны.



3). Прямая r расположена между прямыми p и q. Действительно, пусть Q, P есть точки пересечения отрезка AC с прямыми p и q. Так как AB есть прямая равного наклона к прямым a и b (и образует с ними угол α), то $\angle ABP > \alpha > \angle PAB$. В треугольнике против большего угла лежит больший угол, поэтому $CP = BP < AP$. Это значит, что середина отрезка AC принадлежит отрезку AP. Аналогично можно показать, что середина отрезка AC принадлежит и QC. Отсюда следует, что середина отрезка AC принадлежит отрезку QP, а прямая r расположена в полосе, ограниченной прямыми p и q. Так как p и q параллельны, а прямая r их не пересекает, то прямые r, p и q параллельны. Из транзитивности заключаем, что r, a и c также параллельны, а так как r - перпендикуляр к AB и пересекает AB посередине, то угол параллельности в точке A относительно прямой r равен углу параллельности в точке C относительно прямой r. Это значит, что прямая AC есть секущая равного наклона к a и c.

Считаем теперь, что прямая c принадлежит полосе, ограниченной прямыми a и b. Проведем через точку $C \in c$ секущую CA' равного наклона к прямым c и a, $A' \in a$. По доказанному выше, прямая BA', где $B \in b$, будет секущей равного наклона к прямым b и a. Из леммы 1 следует, что $BA = BA'$. ■

Рассмотрим пучок параллельных прямых. Пусть a - прямая этого пучка, точка $A \in a$. Множество точек M таких, что AM есть секущая равного наклона к прямой a и прямой пучка, проходящей через точку M, называется **предельной линией** или **орициклом**.

Из леммы 21.3 следует, что орицикл не зависит от начальной точки A.

Орициклы применяются при выводе формул тригонометрии гиперболической геометрии.

20.5 Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве Лобачевского

Стереометрия Лобачевского строится на аксиомах Гильберта $I - IV$ и аксиоме Лобачевского $V_л$. К основным объектам добавляется множество плоскостей. Каждая плоскость будет гиперболической плоскостью, так как на ней выполняются все аксиомы плоскости Лобачевского.

Определение прямой, перпендикулярной плоскости, критерии перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности плоскостей, линейный угол двухгранного угла - такие же, как и в евклидовой геометрии. В частности, через данную прямую a можно провести единственную плоскость α, перпендикулярную данной плоскости β, если $a \not\perp \beta$. При этом прямая $\alpha \cap \beta$ называется ортогональной проекцией прямой a на плоскость β.

Прямые называются параллельными (или расходящимися), если они лежат в одной плоскости и параллельны (или расходящиеся), как прямые этой плоскости.

Можно доказать, что в пространстве отношение параллельности в одну сторону есть отношение эквивалентности.

Взаимное расположение прямой и плоскости.

Возможные два случая взаимного расположения.

1). Прямая и плоскость имеют общую точку. Если общих точек две, то прямая принадлежит плоскости (аксиома Гильберта I_6).

2). Прямая и ее ортогональная проекция на плоскость параллельны (расходятся). В этом случае говорят, что прямая и плоскость параллельны (расходящиеся).

Теорема 20.3 *Прямая параллельна плоскости, если она параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости.*

■ Пусть прямая a параллельна прямой b, принадлежащей плоскости α. Пусть прямая c есть ортогональная проекция прямой a на плоскость α, точка $M \in a$, точка $M_1 \in c$ есть ортогональная проекция точки M на прямую c, точка $M_2 \in b$ - ортогональная проекция точки M на прямую b. Так как длина наклонной больше длины перпендикуляра, то $MM_1 < MM_2$. Но прямые a и b параллельны, следовательно, эти прямые неограниченно сближаются в сторону параллельности, то есть $MM_2 \to 0$, если точка M стремится в бесконечность по прямой a в сторону параллельности. Поэтому и $MM_1 \to 0$, когда точка M устремляется в бесконечность по прямой a в сторону параллельности. Прямые a и c не пересекаются, так как в противном случае их общая точка лежала бы на плоскости, содержащей прямые a и b, и на плоскости α, то есть на прямой пересечения этих плоскостей, которая и есть b. Но прямые a и b параллельны, поэтому не пересекаются. Таким образом, a и c не пересекаются. Следовательно, прямые a и c параллельны, значит и прямая a и плоскость α параллельны. ■

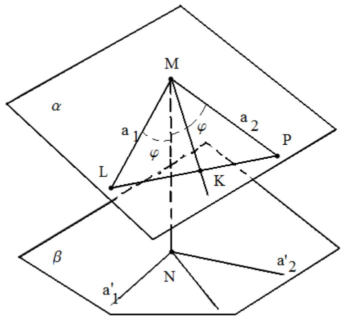
Взаимное расположение двух плоскостей.

Следующий критерий пересечения плоскостей не имеет аналога в евклидовой стереометрии.

Теорема 20.4 *Для того, чтобы две плоскости пересекались, необходимо и достаточно, чтобы в одной из них через произвольную точку проходили две прямые, параллельные другой плоскости.*

■ 1). Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a. Тогда в любой из этих плоскостей через произвольную ее точку можно провести две прямые, параллельные a.

2). Пусть через точку M, принадлежащую плоскости α, можно провести две прямые $a_1 \subset \alpha$ и $a_2 \subset \alpha$, параллельные плоскости β. Обозначим через a_1', a_2' ортогональные проекции прямых a_1, a_2 на плоскость β. Так как угол параллельности зависит только от расстояния, то прямые a_1 и a_2 образуют равные острые углы параллельности $\varphi = \pi(MN)$ с лучом $[MN)$. Пусть точки $L \in a_1$ и $P \in a_2$ расположены ближе к плоскости β, чем точка M. Тогда луч $[MK)$, K принадлежит отрезку LP, образует с лучом $[MK)$ угол меньший, чем φ, значит этот угол меньше угла параллельности $\pi(MN)$. Поэтому прямая MK должна пересечь свою проекцию, то есть плоскости α и β пересекаются. ■



Две плоскости называются параллельными, если в одной из них через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную другой плоскости.

Из предыдущей теоремы следует, что такие плоскости не пересекаются и неограниченно сближаются в том смысле, что $\inf XY = 0$, где точная нижняя грань берется по всем точкам X, Y, принадлежащим этим плоскостям. Последнее следует из свойства параллельных прямых.

По аналогии с параллельными прямыми на плоскости, в пространстве можно определить конус параллельности с вершиной в точке A относительно данной плоскости α. Для этого проведем через точку A всевозможные прямые, параллельные плоскости α. Каждая такая прямая образует один и тот же острый угол с перпендикуляром AA' опущенным из точки A на плоскость α и этот угол равен углу параллельности $\pi(AA')$. Следовательно, множество всех таких прямых образует конус с вершиной в точке A. Это и есть **конус параллельности**.

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух плоскостей. Пусть α и β - две плоскости, A - произвольная точка плоскости α, K - конус параллельности с вершиной в A относительно плоскости β.

1). **Плоскости пересекаются.** Через точку A, принадлежащую плоскости α, можно провести две прямые, параллельные плоскости β. Другими словами, плоскость α пересекает конус K по двум образующим.

2). **Параллельные плоскости.** Пусть плоскость α касается конуса параллельности по образующей a. В этом случае плоскости α и β не пересекаются - плоскость α содержит только одну прямую, параллельную β.

3). **Расходящиеся плоскости.** Пусть плоскость α пересекает конус параллельности только в его вершине. В этом случае плоскости α и β ни параллельны, ни пересекаются. Такие плоскости называются **расходящимися.**

Можно доказать, что две расходящиеся плоскости имеют один общий перпендикуляр и неограниченно расходятся при удалении от общего перпендикуляра.

21 Приложение

Матрицы второго порядка. Матрицей второго порядка называется следующая таблица составленная из действительных чисел $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Матрицу можно обозначать одной буквой. **Определитель** матрицы $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется число равное $ad - bc$, и обозначается $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ или $\det C$, или $|C|$. Например, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ - матрица, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7$. - определитель матрицы B.

Матрицей порядка $n \times m$ называется следующая таблица составленная из действительных чисел

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}.$$

Таблицы вида $\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{im} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, ..., n$ и $\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, ..., m$ называются (i-ой) строкой и (j-ым) столбцом матрицы C.

Матрицу порядка 3×3 будем называть просто матрицей третьего порядка.

Определителем матрицы третьего порядка C называется число, равное

$$c_{11} \cdot \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} - c_{12} \cdot \begin{vmatrix} c_{21} & c_{23} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + c_{13} \cdot \begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}.$$

Обозначение определителя матрицы третьего порядка $|C|$, $\det C$ или

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 19 + 16 = 77$.

Следующие свойства определителей матриц третьего порядка доказываются непосредственными вычислениями:

1). Поменяем в матрице C местами две строки (столбца), получим матрицу C_1. Тогда $\det C = -\det C_1$. Если матрица C имеет одинаковых два столбца (две строки), то $\det C = \ 0$.

2). Общий множитель элементов строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя, например,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \alpha c_{21} & \alpha c_{22} & \alpha c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

3). Определитель обладает свойствои аддитивности по элементам одной строки или столбца. Например,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21}+c'_{21} & c_{22}+c'_{22} & c_{23}+c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Матрица C называется **ортогональной**, если строки матрицы есть координаты единичных и ортогональных векторов, то есть сумма квадратов элементов каждой строки матрицы равна 1, сумма произведений соответствующих элементов разных строк равна нулю.

Ранг матрицы. Пусть C матрица порядка $3 \times n$. Рассмотрим строки матрицы C как координаты n векторов в пространстве. Число линейно независимых векторов среди этих n векторов, называется рангом матрицы C. Обозначается ранг матрицы $\operatorname{rank} C$. Так как в трехмерном пространстве независимых векторов может быть не больше трех, то $\operatorname{rank} C \leqslant 3$.

Аналогично можно ввести определители произвольного порядка.

Содержание

Список литературы

[1] Александров А.Д. Основания геометрии. М., Наука, 1987.

[2] Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М., Наука, 1990.

[3] Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. ч.I, II, М., Просвещение, 1986.

[4] Глейзер Г.И. История математики в школе. М., Просвещение, 1983.

[5] Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М., Наука, 1978.

[6] Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М., 1968.

[7] Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М., 1978.

[8] Смилга В.С. В погоне за красотой. М., 1968.

[9] Егоров И.П. Геометрия. М., 1979.

[10] Каган В.Ф. Великий русский ученый Н.И.Лобачевский и его место в мировой науке. ГТТИ, 1948.

[11] Колмогоров А.Н., Семенов, Черкасов Р.С. Геометрия 6-8. 8-е издание, 1980.

[12] Курант Р. Роббинс Г. Что такое математика. - М. Просвещение, 1967.

[13] Погорелов А.В. Основания геометрии. М., 1979.

[14] Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М., 1974.

[15] Погорелов А.В. Геометрия 6-10. М., 1981.

[16] Рябый М.П. Задача о гиперсферах в n-мерном пространстве. Ученые записки МГПУ. Физ.-мат. науки. Математика. Выпуск 3.-Мурманск:МГПУ-2006.-с.60-89.

[17] Франгулов С.А., Совертков П.И. Геометрия Лобачевского. С.-Пб., 1992.

[18] Широков П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М., Наука, 1983.